UITWERKINGEN

1. De afstand van de Maan tot de Aarde is 384400 km. De tijd voor een beeld van de Maan naar de Aarde is dan 1,28 s. Met de reactietijd van 0,1 s en de tijd voor een signaal terug naar de Maan is in totaal 2 x 1,28 + 0,1 = 2,7 s verlopen. Neem voor de snelheid van een terreinwagen 36km/uur = 10m/s. In 0,1s wordt dan 1m afgelegd. Voor dezelfde afstand maar met een totale 'reactietijd' van 2,7 s mag het voertuig op de maan ten hoogste een snelheid van 0,38 m/s = 1,4 km/uur hebben.

2. Stel de periode waarin de motor aanstaat is t_1 en de periode waarin deze uitstaat is t_2. In de periode dat de motor uit staat lekt een bepaalde hoeveelheid warmte naar binnen: $C.\Delta T.t_2$ (C = warmtelek van de koelkast).
   Dus: $\Delta T.t_2$ = konstant. Als het temperatuurverschil $\Delta T = 25 - (-12) = 37°$ dan is t_2 = 3 min ; dan is bij $\Delta T = 15 - (-12) = 27°$ dan is t_2 = 4,1 min.
   De gedurende de hele periode $t_1 + t_2$ ingelekte hoeveelheid warmte $C.\Delta T.(t_1 + t_2)$ wordt er door de motor in t_1 uitgepompt: $Q = C.\Delta T.(t_1 + t_2)$ met $W/Q = \Delta T/T_0$.
   Dus $\Delta T.(t_1 + t_2)/Q$ = konstant = $\Delta T^2.(t_1 + t_2)/W$ en aangezien W evenredig is met t_1 geldt: $\Delta T^2.(t_1 + t_2)/t_1$ = konstant.
   Voor $\Delta T = 25°$ volgt dan t_1 = 2 min.
   De maximale buitentemperatuur wordt bereikt als $t_2 = 0$, zodat $\Delta T^2 = (37)^2.8/5$ en $T_0 = \Delta T - 12 = 46{,}8 - 12 = 34{,}8°$.

3a. Aan de rechter kant is de frequentie hoger dan links: de waarnemer beweegt van rechts naar links.

b. Voor de rechter kant geldt: $(f_R - f_L)(1 + \frac{v}{c}) = 1{,}01$

   en voor links: $(f_R - f_L)(1 - \frac{v}{c}) = 0{,}99$

   delen van beide vergelijkingen levert: v/c = 0,01

c. Tussen beiden sirenes in geldt: $f_L(1 + \frac{v}{c}) = f_R(1 - \frac{v}{c})$ met v/c = 0,01 en een van beide vergelijkingen in b. volgt: $f_L = 49{,}5$ Hz en $f_R = 50{,}5$ Hz

4a. Door het energieverlies in het plaatje wordt de straal van de baan kleiner: het deeltje beweegt van onder naar boven. De Lorentz-kracht is naar binnen gericht: het deeltje moet een positieve lading hebben en is dus een positron.

b. Als de impuls van een deeltje p is, de lading e, de magnetische veldsterkte B en de straal van de cirkelbaan is r, dan geldt: p = eBr.

De relativistische impuls is: $p = \gamma\beta mc = eBr$ zodat $\gamma\beta = \frac{eB}{mc}.r$. Voor de gegeven stralen ligt de waarde hiervan in de orde van 50. Daaruit volgt dat = 1 ; dwz de deeltjes gaan met vrijwel de lichtsnelheid. Dan volgt: $\gamma \approx \frac{eB}{mc}.r$.

Voor de energie geldt: $E = \gamma mc^2$ zodat het energieverlies bij het passeren van het plaatje is:

$$\Delta E = (\gamma_1 - \gamma_2)mc^2 = \frac{eB}{mc}(r_1 - r_2)mc^2 = eBc(r_1 - r_2) = 10{,}8\ \text{MeV}$$

5. De staaf wordt versneld door de Lorentz-kracht B.I.L. Als de staaf beweegt wordt een inductiespanning opgewekt die samen met de aangelegde spanning V_0 een stroom I door staaf en rails levert.

Er geldt nu: $m.\frac{dv}{dt} = B.I.L$ en $V_0 - \frac{d\Phi}{dt} = I.\rho\,(2x + L)$

Hierin is $\Phi = B.x.L$ de omvatte flux, ρ de weerstand per meter en x de reeds afgelegde weg. Voor de beweging van de staaf volgt dan:

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{BL}{\rho\,(2x + L)}.(V_0 - BLv)$$

a. Op t = 0 is v = 0 en x = 0 zodat de versnelling dan is: $\frac{dv}{dt} = \frac{BV_0}{\rho\, m} = 100\ \text{m/s}^2$

b. De eindsnelheid wordt bereikt als de versnelling nul is. Dan volgt:

$$v = \frac{V_0}{BL} = 1500\ \text{m/s}$$

6. Als de massa van het kruit m is en de halve buitendiameter R, dan is het totale impulsmoment $m.u.R = I.\omega$. Hierin is I het gemiddelde traagheidsmoment van de bol tijdens het ontbranden van het kruit. Maar vanwege de geringe dichtheid van het kruit mag de bijdrage aan het traagheidsmoment van het kruit verwaarloosd worden. Het traagheidsmoment van een bol is:

$$I = \frac{2}{5}mR^2 = \frac{2}{5}.\frac{4}{3}\pi R^3\rho .R^2 = \frac{8}{15}\pi\rho R^5$$

Voor een bolschil is dit dus: $I_{schil} = \frac{8}{15}\pi\,\rho\,(R^5 - r^5)$.

De uiteindelijke hoeksnelheid wordt nu:

$$\omega = \frac{mu.R}{I_{schil}} = \frac{\frac{4}{3}\pi\,r^3\rho_{kruit}.R}{\frac{8}{15}\pi\,\rho_{schil}(R^5 - r^5)} = \frac{5}{2}\frac{u}{R}\frac{\rho_{kruit}}{\rho_{schil}}\frac{(r/R)^3}{1-(r/R)^5} = 15{,}2u$$

Uit het gegeven dat men een toon van 50Hz hoort volgt dat de bol 50/4 omwentelingen per seconde maakt; dan is de hoeksnelheid ω = 78,5 rad/s. Voor de uitstroomsnelheid van het gas volgt nu: u = 5,2 m/s

7. Het volume van de ballon is $V = \pi D^3/6$. De hoeveelheid lucht die per seconde uitstroomt is $dV/dt = \pi/2.D^2.dD/dt$ (:) overdruk (:) D zodat $dD/dt = k/D$. Intergreren levert: $D^2 = 2kt$. Dit betekent dat bij een ballon met een 2x zo grote diameter het leeglopen 4x zo lang duurt.

8. Is de echte windsnelheid v en de snelheid van de boot u, dan is de schijnbare windsnelheid $w = \sqrt{v^2 + u^2}$ zodat de kracht op de boot is: $F = C_1(\alpha - \beta)w^2 = C_1(\alpha - \beta)(v^2 + u^2)$ De component van deze kracht in voorwaartse richting is: $F.\sin\beta$.
Bij evenwicht geldt: $F.\sin\beta - F_W = 0$ zodat $c_1.\sin\beta.(\alpha - \beta)(v^2 + u^2) - c_2u^2 = 0$

Aangezien $\frac{v}{u} = \tan\alpha$ en $\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ volgt: $\sin\beta\,(\alpha - \beta) = \frac{c_2}{c_1}\cos^2\alpha$

Uit de kleine-hoek-benadering volgt dan: $\frac{c_2}{c_1} = \beta\,(\alpha - \beta) = \alpha\,\beta - \beta^2$ . . . . . [1]

Als de bootsnelheid u bij een gegeven wind v zo groot mogelijk is, dan is v/u en daarmee de hoek α minimaal bij de juiste keuze van hoek β. Door uitdrukking [1] te differentiëren naar β en $\frac{d\alpha}{d\beta} = 0$ te stellen volgt: $\alpha = 2$ en

$$\beta\,(2\beta - \beta) = \beta^2 = \frac{c_2}{c_1} = \frac{1}{30} \text{ zodat}$$

$$= 0{,}183\ (10{,}5^\circ) \text{ en } \frac{u}{v} = \frac{1}{\tan\alpha} = 2{,}6$$