1. Een gat in de emmer (3 punten)

Ter hoogte van het gaatje is de druk $p = \rho g\left(H - h\right)$. De kinetische energie van het uitstromende water per volume eenheid is: $K = \frac{1}{2}\rho v^2$, zodat voor de snelheid van het uitstromende water volg: $v = \sqrt{2g\left(H - h\right)}$. 1

Da tijd dat het water valt wordt gevonden uit: $\frac{1}{2}gt^2 = h \rightarrow t = \sqrt{\frac{2g}{h}}$.

Voor de horizontaal afgelegde weg geldt dan: $x = vt = 2\sqrt{\left(H - h\right)h}$. x is maximaal voor $h = \frac{1}{2}H$ 2

2. Hete luchtballon (4 punten)

1. De opwaartse kracht op de ballon is gelijk aan het gewicht van de verplaatste lucht. Ervan uitgaand dat deze kracht met de zwaartekracht in evenwicht is, geldt:

   $\rho_0 Vg = (M + \rho V)g$ of $\rho_0 - \rho = \frac{M}{V}$ 1

   met ρ_0 de dichtheid van de omringende lucht, V het volume van de ballon, M de massa van bak en ballonmateriaal en ρ de dichtheid van de lucht in de ballon.

   Volgens de ideale gaswet geldt:

   $$\rho = \frac{mn}{V} = \frac{mP}{RT}$$

   met m de molmassa van lucht (29g, gaan we vanuit).

   Dit geldt voor in en voor buiten de ballon. Verder is daar de luchtdruk gelijk.

   Dan geldt voor de krachten op de ballon:

   $$\frac{mP}{RT_0} - \frac{mP}{RT} = \frac{M}{V}$$

   de nul impliceert een grootheid buiten de ballon...

   dus: $\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} - \frac{M}{m}\frac{R}{PV}$ 1

   Temperatuur buiten is 290K, luchtdruk rond de 1 bar.

   $$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 1770 \text{ m}^3$$

   Invullen levert op: $\frac{1}{T} = \frac{1}{379 \text{ K}}$ 1

$M = mn = \frac{mPV}{RT} = 1600 \text{ kg}$ 1

3. Multifocale lens (4 punten)

Bekijk een evenwijdige bundel waarvan één lichtstraal langs de hoofdas loopt en één daar evenwijdig aan die gaat door de n^e^ ring. Na buiging snijden de lichtstralen elkaar in het brandpunt. Voor het weglengteverschil moet dan bij constructieve interferentie gelden: $\sqrt{\left(r_n^2+f^2\right)}-f=n\cdot\lambda$ zodat 1

$r_n^2=\left(f+n\cdot\lambda\right)^2-f^2=2f\lambda n+n^2\lambda^2\approx 2f\lambda n$ dus $r_n=\sqrt{2f\lambda n}$ 1

Merk op dat f zo gekozen moet worden dat deze gelijk is aan de afstand van de lens tot het netvlies.

Neem nu een voorwerp op de hoofdas op een afstand v van het centrum van de lens. Voor het weglengteverschil tussen een lichtstraal door de n^e^ ring en de m^e^ ring moet dan voor constructieve interferentie gelden:

$\sqrt{v^2+r_n^2}+\sqrt{f^2+r_n^2}-\sqrt{v^2+r_m^2}+\sqrt{f^2+r_m^2}=N\cdot\lambda$ 1

Hieruit volgt: $v=f\dfrac{1}{\left(\dfrac{N}{n-m}\right)-1}$

Voor een bepaalde voorwerpsafstand moet de verhouding $\dfrac{N}{n-m}$ dan constant zijn. 1

4. Stroomdraden (3 punten)

De elektrische energie wordt omgezet in warmte. Het elektrische vermogen $P_{opgenomen}$ is, bij vaste spanning, omgekeerd evenredig met de weerstand en dus evenredig met het kwadraat van de diameter D dus: $P_{opgenomen}\approx D^2$. Tengevolge van de ontwikkelde warmte stijgt de 1
temperatuur van de draden. De draden staan de warmte aan de omgeving af via geleiding, stroming en straling. De warmteafgifte is echter evenredig met de oppervlakte van de draden en aangezien de lengte van de draden dezelfde is, evenredig met de diameter. Dus $P_{afgegeven}\approx D\cdot f\left(T\right)$. Hierin is $f\left(T\right)$ een of andere stijgende functie van de temperatuur. 1
Omdat de spanning langzaam wordt opgevoerd, mag steeds een evenwicht tussen de uit de elektrische energie opgenomen warmte en de afgegeven warmte verondersteld worden. Er geldt dan $P_{opgenomen}=P_{afgegeven}$ zodat $f\left(T\right)\approx D$. Daardoor zal de dikke draad een hogere 1
temperatuur krijgen dan de dunne draad en zal de dikke draad als eerste doorbranden.

5. Spoel en condensator (4 punten)

De schakeling is bij een bepaalde zelfinductie L_0 in resonantie en heeft dan een minimale impedantie

$$Z_0 = \frac{U_{max}}{I_{max}} = R$$

Voor de twee andere standen geldt dan: $$Z_1 = \frac{U_{max}}{\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}};\ Z_2 = \frac{U_{max}}{\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}}$$

$$Z_1 = Z_2$$ 1

Wat je kunt schrijven als: $\sqrt{R^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

Ofwel $\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}\right)^2$

Wat resulteert in $\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right) = -\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}\right)$

En niet zonder minteken, dan zouden de zelfinducties gelijk moeten zijn.

$$\omega\left(L_1 + L_2\right) = \frac{2}{\omega C} \Rightarrow C = \frac{2}{\omega^2\left(L_1 + L_2\right)}$$ 1

Invullen van getallen levert $C = 4$ μF.

Voor L_1 geldt: $\frac{U_{max}}{\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}} = Z_1 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

1. en 3. geven samen: $$\sqrt{R^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = R\sqrt{2}$$

$$R^2 = \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)^2$$

Invullen van waardes levert dan op: $R = 50\ \Omega$. 0,5

Invullen van de waarden in de impedantie geeft dan $Z_1 = 50\sqrt{2}\ \Omega$, en de andere impedantie is daaraan gelijk.

Voor I geldt $I_{max} = \frac{U_{max}}{Z_0} = \frac{U_{max}}{R} = \frac{2}{50} = 0{,}04\ \text{A}$. 0,5

Dan is $I_1 = I_2 = 0{,}04/\sqrt{2} = 0{,}0283$ A.

Voor het faseverschil kun je schrijven:

$$\tan\varphi = \frac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}}{R}$$ 1

Invullen levert dan op dat $\varphi_1 = -45°$ en $+45°$ voor φ_2.

6. Schieten (4 punten)

De afname van de energie per seconde is: $F_w \cdot v = 0{,}1 \cdot v^2 = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mv\frac{dv}{dt}$

. Daaruit volgt: . $\frac{dv}{v} = -\frac{0{,}1}{m}dt$ 1

De oplossing hiervan is: $v = v_0 e^{-\frac{0{,}1}{m}t} = \sqrt{\frac{2E_0}{m}} \cdot e^{-\frac{0{,}1}{m}t}$ 1

De afgelegde weg na 1 seconde is: $x = \int v \cdot dt = \frac{\sqrt{2E_0 m}}{0{,}1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{0{,}1}{m}}\right)$. Deze uitdrukking is 1

maximaal als $\frac{0{,}1}{m} = 1{,}256$, zodat $m = 0{,}08$ kg . 1

7. Fietsband (4 punten)

Adiabatisch, dus $p_2 V_2^{\gamma} = p_1 V_1^{\gamma} \rightarrow V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 1\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{5}{7}} = 0{,}25$ L 1

met $\gamma = \frac{7}{5}$ vanwege de twee-atomigheid, wat twee extra vrijheidsgraden oplevert.

De werkelijkheid is complexer: voor een twee-atomig molecuul verwacht je in eerste instantie dat $C_p/C_v = 9/7$. Dat voor zuurstof en stikstof is C_p/C_v bij kamertemperatuur inderdaad ongeveer 1.40 is komt door dat een van de vrijheidsgraden (de vibratie) "niet meedoet". Voor zwaardere twee-atomige gassen zoals I_2 benadert C_p/C_v de waarde 9/7; voor waterstof bij lage temperatuur gaat C_p/C_v richting 5/3 alsof het een een-atomig molecuul is.
Ook voor moleculen met nog meer atomen blijkt C_p/C_v in het algemeen significant groter te zijn dan te verwachten is op basis van het theoretische aantal vrijheidsgraden. Quantummechanica is nodig om goed te verklaren wat de waarde is.

Met dank aan Sytze Brandenburg

Voor de druk geldt: $p = \frac{c}{V^{\gamma}}$ waarbij de constante kan worden afgeleid uit de begincondities.

De verrichte arbeid kan worden geschreven als:

$$W = -\int p\,dV = -p_1 V_1^{\gamma} \int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma} dV = -p_1 V_1^{\gamma} \left. \frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \right|_{V_1}^{V_2}$$ 1

$$W = \frac{p_1 V_1^{\gamma}}{\gamma - 1}\left(\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}}\right) = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right]$$

$$W = \frac{1 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{2/5}\left[(4{,}0)^{\frac{2}{5}} - 1\right] = 185 \text{ J}$$ 1

Hier geldt:

$$p_2 V_2^{\gamma} = p_1 V_1^{\gamma} \rightarrow nRT_2 V_2^{\gamma-1} = nRT_1 V_1^{\gamma-1} \rightarrow$$

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 300\left(\frac{1}{0{,}25}\right)^{\frac{2}{5}} \approx 520 \text{ K}$$ 1

8. Gravitatielens (4 punten)

De afbuiging volgt een cirkelboog. Dan is de daarbij afgelegde weg: . $d \cdot \theta = 4\dfrac{GM}{c^2}$ 1

Dit is voor de lichtstralen langs beide kanten van het stelsel hetzelfde. Is *D* de afstand van de Aarde tot het sterrenstelsel, dan is het verschil in aankomst van het licht op aarde:

$$\Delta t = \frac{D}{c}\left(\cos\alpha - \cos\beta\right) = 2\frac{D}{c}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{D}{2c}\left(\alpha^2 - \beta^2\right)$$ 1

Zodat $D \approx \dfrac{2c\Delta t}{\alpha^2 - \beta^2} = \dfrac{\left(3600 \cdot \dfrac{180}{\pi}\right)^2}{100-25} \approx 6 \cdot 10^8$ lichtjaar 2