ANTWOORDEN TOETS 1

MECHANICA

1 *De ultieme bungy-jump.*

(a) We kunnen het beste naar verhoudingen van M en M_E kijken.
Voor de massa geldt: $M = \rho \cdot V$

Voor de verhouding geldt dus: $\dfrac{M}{M_E} = \dfrac{\rho \cdot V}{\rho \cdot V_E} = \dfrac{V}{V_E} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi x^3}{\frac{4}{3}\pi R_E^3} = \dfrac{x^3}{R_E^3}$, dus: $M = M_E \dfrac{x^3}{R_E^3}$

(b) Invullen van antwoord van (a) in de formule: $F = -G\dfrac{mM}{x^2} = -G\dfrac{m}{x^2} \cdot \dfrac{M_E x^3}{R_E^3} = -G\dfrac{mM_E}{R_E^3}x$

(c) De tweede wet van Newton: $F_R = m\ddot{x} = -G\dfrac{mM_E}{R_E^3}x$,de massa valt weg: $\ddot{x} + G\dfrac{M_E}{R_E^3}x = 0$

(d) Als oplossing geldt: $x(t) = R_E \sin(\omega t)$
Hieruit volgt: $\ddot{x} = -R_E\omega^2 \sin(\omega t)$

Invullen levert: $-R_E\omega^2 \sin(\omega t) + G\dfrac{M_E}{R_E^3}R_E \sin(\omega t) = 0$

Hieruit vallen dingen weg: $-\omega^2 + G\dfrac{M_E}{R_E^3} = 0$,dus: $\omega = \sqrt{G\dfrac{M_E}{R_E^3}}$

(e) Invullen: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_E^3}{GM_E}} = \ldots = 5069\ s \approx 1\frac{1}{2}\ uur$

ELEKTRICITEIT & MAGNETISME

2 *Serieschakeling.*

(a) In deze serieschakeling geldt voor de impedantie: $Z = \sqrt{\left(R^2 + (\omega L - \dfrac{1}{\omega C})^2\right)}$

Deze is minimaal als $(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}) = 0$ en dus $\omega = \sqrt{(\dfrac{1}{LC})}$ wat geeft dat

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} = 6{,}5 \cdot 10^2\,\text{Hz}$$

Dan geldt dus $I = U/R = 20/100 = 0{,}20$ A.

(b) Bij 500 Hz moeten we eerst Z uitrekenen:

$$Z = \sqrt{\left(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2\right)} = \sqrt{\left(100^2 + \left(2\pi 500 \cdot 0{,}3 - \frac{1}{2\pi 500 \cdot 200 \cdot 10^{-9}}\right)^2\right)} = 656\Omega$$

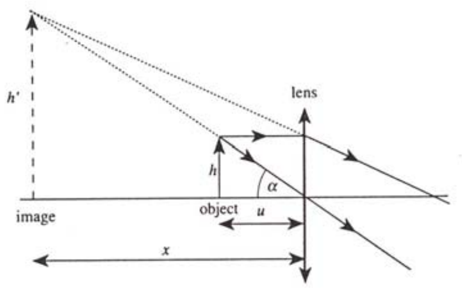
$I = U/Z = 20/656 = 0{,}030$A

$Z_L = \omega L = 2\pi 500 \cdot 0{,}3 = 942\Omega$ en $U = IZ = 0{,}030 \cdot 942 = 28{,}3$ V

3 *Ongeladen condensator.*
De bovenste tak moet stroomloos zijn, met een ongeladen en dus spanningloze condensator doet de weerstand er niet toe en geldt dat zowel de spanning over R_1 en E als over R_2 en $4E$ gelijk moet zijn aan $2E$.
De grootte van de stroomsterkte I door R_1 en R_2 moet gelijk zijn.
$\begin{array}{l} IR_1 + E = 2E \\ IR_2 + 4E = 2E \end{array}$ hieruit volgt dat $\begin{array}{l} IR_1 = E \\ IR_2 = 2E \end{array}$ wat betekent dat de groote van R_2 2 keer die van R_1 moet zijn, dus $R_1 = 40\Omega$

GOLVEN & OPTICA

4 We hebben een voorwerp met hoogte h. We krijgen een virtueel beeld met hoogte h'.
Voorwerpsafstand noemen we u, beeldafstand x.
Uitgaande van kleine hoeken geldt $\alpha = \frac{h}{u}$



We gaan ervan uit dat de ooglens tegen het vergrootglas aanzit, omdat dat de grootste hoek en vergroting geeft.
Vergroting is gedefinieerd als de grootte van de hoek waaronder het beeld wordt gezien, gedeeld door de grootte van de hoek waaronder heet voorwerp nog gezien kan worden (nabijheidafstand), dus $N = \frac{\alpha}{h/d} = \frac{d}{u}$.
u moet dus zo klein mogelijk zijn, alleen moet x nog wel zo groot zijn dat $x \geq d$, anders wordt het beeld niet scherp. Nu nog u als een functie van x schrijven.
$\frac{1}{u} = \frac{1}{f} + \frac{1}{x}$ (want het is een virtueel beeld en afstand x moet dus als negatief in de formule worden meegenomen)
Dit invullen levert $N = \frac{d}{u} = \frac{d}{f} + \frac{d}{x}$. Dit wordt maximaal als je zorgt dat het voorwerp in de nabijheidafstand staat en dan krijg je dus $N_{\max} = \frac{d}{f} + 1$

THERMODYNAMICA

5 *Effusie.*
(a) Het aantal moleculen ΔN dat de het oppervlak in een tijd Δt treft ondergaat een impulsverandering van $2m\langle v_x \rangle$. De kracht op het oppervlak A is de impulsverandering per tijdseenheid, de druk is de kracht per oppervlak. Samen:
$$P = \frac{F}{A} = \frac{\Delta p/\Delta t}{A} = \frac{\Delta N\ 2m\langle v_x \rangle/\Delta t}{A}$$

Voor het aantal ΔN geldt dus: $\Delta N = \dfrac{PA\Delta t}{2m\langle v_x\rangle}$

(b) Voor het gas geldt: $K = \frac{3}{2}kT$

De kinetische energie K wordt gegeven door: $K = \frac{1}{2}m\left(\langle v_x^2\rangle + \langle v_y^2\rangle + \langle v_z^2\rangle\right) = \frac{3}{2}m\langle v_x^2\rangle$

Deze twee relaties leiden direct tot de gevraagde relatie.

(c) Uit het antwoord van (a) halen we:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{PA}{2m\langle v_x\rangle}$$

We maken gebruikt van de algemene gaswet: $PV = NkT$ oftewel $P = \dfrac{NkT}{V}$

Samen met het resultaat van (b) volgt:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{dN}{dt} = \frac{A}{2m}\frac{NkT}{V}\sqrt{\frac{m}{kT}} = \frac{A}{2V}\sqrt{\frac{kT}{m}}N$$

Het laatste probleem is de '-'. De ΔN is als een afname gedefinieerd. Als we kijken naar het resultaat hierboven zou dN/dt ook een positief getal opleveren. Dat kan niet. Vandaar het min teken.

(d) De gegeven differentiaal vergelijking is van de vorm: $dN/dt = -c\,N$ en heeft als oplossing: $N(t) = A\,e^{-ct}$.

In dit geval dus: $N(t) = N_0\, e^{-\frac{A}{2V}\sqrt{\frac{kT}{m}}t}$

De karakteristieke tijd is dus: $\tau = \dfrac{2V}{A}\sqrt{\dfrac{m}{kT}}$

(e) De druk gaat van ca. 6 atm. naar 1 atm. Het aantal deeltjes wordt dus 1/6.

$$\frac{N(t)}{N_0} = e^{-\frac{A}{2V}\sqrt{\frac{kT}{m}}t}$$

$$\ln\left(\tfrac{1}{6}\right) = -\frac{A}{2V}\sqrt{\frac{kT}{m}}t$$

Het volume van een fietsband is ca. 2 liter = $2 \cdot 10^{-3}$ m^3

1 mol lucht is ca. 29 gram. Dus m is $0{,}029/N_A \approx 5 \cdot 10^{-26}$ kg

De temperatuur is ca. 300 K.

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$

Invullen: $A = \dfrac{-\ln\left(\frac{1}{6}\right)2V}{t}\sqrt{\dfrac{m}{kT}} \approx \dfrac{1{,}8\cdot 2\cdot 2\cdot 10^{-3}}{3600}\sqrt{\dfrac{5\cdot 10^{-26}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300}} = 2\cdot 10^{-6}\cdot 3{,}5\cdot 10^{-3} \approx 7\cdot 10^{-9}$ m^2

ANTWOORDEN TOETS 2

MECHANICA

1 *Astronaute.*

(a) Behoud van impulsmoment

$0 + mrv_0 = +I\omega + mr^2\omega$

Hieruit halen we dus: $mrv_0 = \left(I + mr^2\right)\omega$

Het gaat om het afschatten van het traagheidsmoment van de astronaute.

Als we uitgaan van een cilinder ($I = \frac{1}{2}MR^2$) met een straal van 15 cm dan volgt:

$$\omega = \frac{mrv_0}{\left(I + mr^2\right)} = \frac{mrv_0}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)} = 1{,}23\ \text{rad/s}$$

(b) Behoud van impuls: $-mv_0 = \left(M + m\right)v_x$

$$v_x = \frac{-mv_0}{\left(M + m\right)} = -0{,}09\ \text{m/s}$$

(c) Behoud van energie

$$Q = \tfrac{1}{2}mv_0^2 - \tfrac{1}{2}\left(M + m\right)v^2 - \tfrac{1}{2}\left(I + mr^2\right)\omega^2$$

$$Q = \tfrac{1}{2}mv_0^2 - \tfrac{1}{2}\left(M + m\right)\left(\frac{mv_0}{M + m}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\left(I + mr^2\right)\left(\frac{mrv_0}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}\right)^2$$

$$\frac{Q}{\frac{1}{2}mv_0^2} = 1 - \frac{m}{M + m} - \frac{mr^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2} = 1 - 0{,}03 - 0{,}25 = 0{,}72$$

Dus 72% van de initiële energie wordt omgezet in thermische energie.

ELEKTRICITEIT & MAGNETISME

2 *Bewegende staaf.*

Voor de flux geldt: $\phi = BA\left(t\right)$ en $U_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -Bsv(t)$

$R = \frac{U}{I} = \frac{24}{3} = 8\ \Omega$. De gevraagde R is dan 6 Ω.

3 *Schakeling.*

(a) Op het moment dat S wordt gesloten kun je doen alsof de condensatoren er niet zijn, er is nog geen lading opgebouwd en dus nog geen spanning over.

De weerstanden van 20 Ω en 30 Ω staan parallel en samen in serie met 10 Ω en dat resulteert in een totale weerstand van 12 Ω + 10 Ω = 22 Ω.

$I=U/R=6/22=0{,}27$A

Dus over 10 Ω staat $U=IR=0{,}27\cdot 10=2{,}7$V en over de andere weerstanden 6-2,7=3,3V.

10Ω: $I = 0{,}27$A

20Ω: $I = U/R = 3{,}3/20 = 0{,}16$A

30Ω: $I = U/R = 3{,}3/30 = 0{,}11$A

(b) Als S lange tijd gesloten is, zijn de condensatoren geladen en loopt daar geen stroom meer door. De spanning over die tak is gelijk aan de spanning over de weerstand van 20 Ω, dus 4 V.
De totale capaciteit is $(1/2 + 1/4)^{-1} = 1{,}33\ \mu F$.
Totale lading is dan $Q = UC = 4 \cdot 1{,}33 \cdot 10^{-6} = 5{,}33 \cdot 10^{-6} C$
Beide condensatoren moeten die lading hebben, dat betekent dat die van 4μF en die van 2 μF elk $5{,}33 \cdot 10^{-6} C$ lading moeten hebben. (en dus uitkomen op 1,33V en 2,67V).

GOLVEN & OPTICA

4 *Prisma in water.*
Met ϕ als hoek van breking geldt:

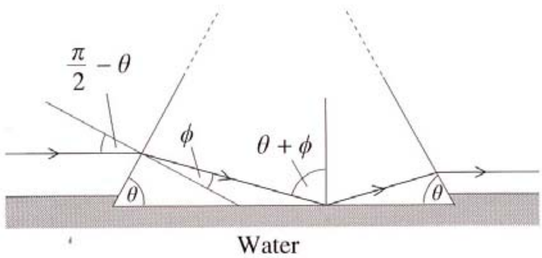
$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = n_g \sin(\phi)$$

Met wat meetkunde vind je dan de hoek waarmee de overgang glas-water wordt geraakt:

$$\theta + \phi$$

Voor totale reflectie geldt dan dat:

$$\theta + \phi \geq \sin^{-1}(\frac{n_w}{n_g})$$



Met combineren van de formules en gebruik van $\sin(\theta + \phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$ voor elimineren van ϕ vind je dan

$$n_g^2 - n_w^2 \geq\sim \cos^2\theta\left(n_g^2 + 1 - 2n_w\right)$$

Invullen levert dan 25,9°.

THERMODYNAMICA

5 In feite is er een beginsituatie van 4V (3V + V) en een 2V.
Het middelste volume krijgt nu een druk p_2 van 1,6 p_1.
Dit gaat zich weer verdelen en (bij gelijkblijvende temperaturen) krijgt een druk p_3 in alle compartimenten. Voor het middelste volume geldt:
$1{,}6\, p_1 \cdot 2V = p_3 \cdot xV$
Dan volgt voor de andere twee gecombineerde volumes:
$p_1 \cdot 4V = p_3 \cdot (6V - xV)$
De twee vergelijkingen optellen:
$7{,}2\, V \cdot p_1 = p_3 \cdot 6V$ oftewel $p_3 = \frac{7{,}2}{6} p_1 = 1{,}2\, p_1$
dus (met pV = C) 4V wordt 4V/1,2 = 3,33 V
De twee volumes zullen echter nog steeds in de verhouding 1:3 verdeeld worden.
Dus het linker en rechter volume worden resp. 0,83V en 2,5V
Het nieuwe volume van 2V wordt 6V – 3,33 V = 2,67V

6 Het volume van de bel is 8 keer zo groot geworden.
Dat betekent dat de druk in de bel nog 1/8 van de originele druk is.
De druk was dus op de diepte gelijk aan 1013 hPa · 8 = 8100 hPa.

Voor de druk geldt: $p = h\rho g$
Dat levert een diepte op van ongeveer 71m.