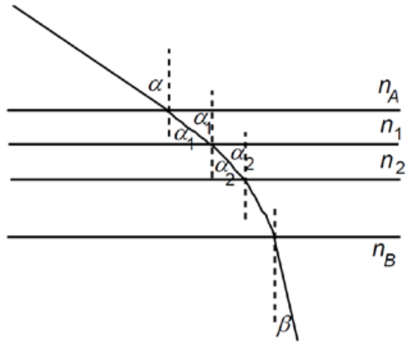
## 1. Fata Morgana (3pt)

(IPHO 1984)




a. Met behulp van de figuur kun je zien: 0,5

$$n_A \sin \alpha = n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 = \cdots = n_B \sin \beta$$

b. Het verschijnsel komt door totale reflectie in een laag warme lucht als geldt dat $\beta = 90°$

Dat geeft $n_A \sin \alpha = n_B \sin 90° = n_B$ 0,5

c. Omdat de dichtheid van lucht $\rho$ omgekeerd evenredig is met de absolute temperatuur $T$ bij constante druk, kunnen we schrijven:

$$n(T) = 1 + k \cdot \rho = 1 + {}^{k}/_{T}$$ 0,5

Bij 15 °C geeft dit voor $k = 0{,}0795$

Om totale reflectie te krijgen moet gelden $n_{30} \sin \alpha = n_T$ ofwel 0,5

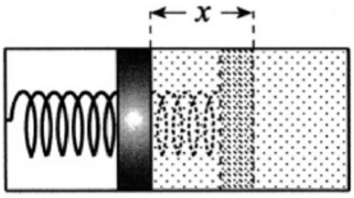
$\left(1 + \frac{k}{303}\right) \cdot \frac{L}{\sqrt{h^2+L^2}} = \left(1 + \frac{k}{T}\right)$ met $h = 1{,}6\ \mathrm{m}$ en $L = 250\ \mathrm{m}.$ 0,5

Omdat geldt dat $h \ll L$ kunnen we een taylorontwikkeling gebruiken in ${}^{h}/_{L}$ 0,5

$$T = \frac{303}{\left(\frac{303}{k}+1\right)\frac{1}{\sqrt{1+{}^{h^2}/_{L^2}}-\frac{303}{k}}} \approx 303\left(1 + \frac{303h^2}{2kL^2}\right) = 328\ \mathrm{K} = 56\ \mathrm{°C}$$

## 2. Gascilinder met veer (3pt)

(opgave 4.24 uit Cahn, a guide to physic problems 2)




Het gas zet uit, het verricht dus positieve arbeid, omdat het thermisch is geïsoleerd, is de energieverandering negatief en daalt de temperatuur. Voor een ideaal gas hangt dit alleen af van de temperatuurverandering en er geldt dan:

$$\Delta E = C_V \Delta T = C_V (T_1 - T_0) \qquad (1)$$

Met $C_V$ de warmtecapaciteit van 1,0 mol gas bij constant volume (voor een één-atomig gas geldt $C_V = \frac{3R}{2}$. De arbeid verricht door het gas gaat in het induwen van de veer zitten:

$U = \frac{Kx^2}{2} = -\Delta E$ met $K$ de veerconstante en $x$ de verplaatsing van de zuiger. (2) 0,5

Bij evenwicht geldt voor de krachten op de zuiger:

$F = Kx = p_1 A$ met $A$ de oppervlakte van de zuiger, dus met de ideale gaswet voor 1 mol gas geldt:

$$K = \frac{p_1 A}{x} = \frac{RT_1 A}{xV_1}$$

Deze $K$ in $U$ invullen geeft: 0,5

$$U = \frac{RT_1 A}{2xV_1} x^2 = \frac{RT_1 Ax}{2V_1} \qquad (3)$$

*Ax* is de volumeverandering van het gas:

$$Ax = V_1 - V_0 = 2V_0 - V_0 = V_0 \qquad (4)$$

(3) in (2) geeft dan:

$$U = \frac{RT_1 V_0}{4V_0} = \frac{RT_1}{4} \qquad (5)$$

(4) en (2) invullen in (1) geeft dan:

$$\Delta E = C_V (T_1 - T_0) = -\frac{RT_1}{4} \qquad (6)$$

en 0,5

$$T_1 = \frac{C_V T_0}{C_V + R/4} = \frac{T_0}{1 + R/4C_V} = \frac{300}{1 + 1/6} = 257 \text{ K} \qquad (7)$$

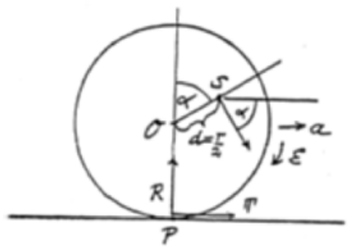
voor de druk:

$$p_1 V_1 = 2 p_1 V_0 = RT_1 \qquad (8)$$ 0,5

en

$$p_1 = \frac{1}{2}\frac{T_1}{T_0} p_0 = \frac{p_0}{2 + 2R/2C_V} = \frac{3}{7} p_0 = 0{,}43 \text{ bar} \qquad (9)$$ 1

## 3. Ring en massa (3pt)




De totale massa van het system is $M = 2m$. Het massamiddelpunt van alleen de ring is in het centrum. Het massamiddelpunt van het systeem bevindt zich dus op een afstand $d = {}^{r}/_{2}$ van het centrum 0,5
op de rechte lijn vanuit O naar het gewicht. Het traagheidsmoment van het systeem ten opzichte van de as door O is $I_0 = 2mr^2$. Voor de as door het massamiddelpunt S geldt met behulp van het theorema van Steiner: $I_S = I_0 - Md^2 = \frac{3}{2}mr^2$. Voor de as door de plek waar de ring de grond raakt geldt: $I = I_S + M(d^2 + r^2 + 2dr\cos\alpha) = 5mr^2$ 0,5

We kunnen de hoekversnelling $\varepsilon$ van de ring bepalen met hulp van de vergelijking die de beweging van de ring om de as door P beschrijft. $I\varepsilon = Mgd\sin\alpha$ /1/ en dat $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{10}\frac{g}{r}$ /vgl 2/.

Je kunt de hoekversnelling ook bepalen met de volgende vergelijkingen:

$T = Ma_S$ /vgl3/, translatie in horizontale richting door de wrijvingskracht $T$/ en $Mgd\sin\alpha - Tr - Mad\cos\alpha = I_0\frac{a}{r}$ /vgl4/, rotatie rond het centrum van de ring van inertiaalstelsel wat met C met versnelling $a$ meebeweegt/. 0,5

De versnelling $a_S$ in horizontale richting bestaat uit de horizontale projectie van de versnelling van het massamiddelpunt in S ten opzichte van het midden O van de ring en van de versnelling $a$ van de ring ten opzichte van de tafel. $a_S = \varepsilon r + \varepsilon\frac{r}{2}\cos\alpha = \frac{5}{4}a$ /vgl5/ 0,5

Om ter rollen en niet te glijden, kijken we naar de vergelijking van de rotatie van het systeem rond het massamiddelpunt S die de reactiekracht $R$ van de tafel op de ring in verticale richting in zich heeft.

$Rd\sin\alpha - T(r + d\cos\alpha) = I_S\varepsilon$ /vgl6/ 0,5

Substitueren in $\varepsilon = \frac{a}{r}$ geeft dan $a = \frac{4}{5}a_S = \frac{4}{5}\frac{T}{M}$

We krijgen dan als voorwaarde voor rollen $F_w = fR > T$ en dus $f > \frac{T}{R} = \frac{5\sqrt{3}}{37}$ 0,5

Je kunt ook uitgaan van /vgl3/ en de vgl voor translatie van het massamiddelpunt in verticale richting $Mg - R = M\varepsilon d\sin\alpha$

Dan kun je berekenen: $T = Ma_S = \frac{5\sqrt{3}}{20}mg$ en $R = \frac{37}{20}mg$ wat overeenkomt met het eerder gevonden resultaat

## 4. Transparante film (2 pt)

es 2004

De kleine golflengtetrillingen in het diagram komen door de diffractie van de film.
Voor de maxima geldt dan: $2dn = \lambda N = {}^{cN}/_{v}$ en dus $2dnv = cN$ en $2dn(v + \delta v) = c(N+1)$, zodat geldt $2dn\delta v = c$ en $d = c/2n\delta v$. 1

We nemen een groter golflengte interval bijvoorbeeld $\Delta v =$ 80 THz en tellen het aantal maxima ertussen, $m \approx 34$.
Dan geldt dat: $\delta v = \Delta v/m \approx 3{,}35$ THz en $d \approx 50$ µm. 1

## 5. Mechano – elektrische trillingen (4pt)

(es2005)

a. 2e wet van newton: $m\ddot{x} = -kx$, dus $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$, dus $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. 0,5

b. Met Gauss geldt voor de lading op de plaat $Q = S\varepsilon_0 E = S\varepsilon_0 U/x_1$. Voor de kracht op de plaat geldt: 0,5
$F_e = k(x_0 - x_1) = Q\langle E\rangle$ met $\langle E\rangle$ het gemiddelde elektrisch veld (gemiddeld over de ladingen).
Kijkend naar de ladingslaag (op het oppervlak van de plaat), hangt het elektrisch veld daar lineair af van de netto lading de plaat in. Daarom is het gemiddelde veld het rekenkundig gemiddelde van de velden aan beide kanten van de laag $\langle E\rangle = E/2$. En daarmee geldt $F_e = Q\,E/2$.
Dus $F_e = \frac{S}{2}\varepsilon_0\left(U/x_1\right)^2$ en daarmee: $U = x_1\sqrt{2k(x_0 - x_1)/S\varepsilon_0}$. 0,5

c. Als de platen over afstand $x$ bewegen wordt de verandering van de kracht door het elektrisch veld:
$\delta F_e = x\left|\frac{d}{dx_1}\frac{S}{2}\varepsilon_0(U/x_1)^2\right| = \frac{x}{x_1}S\varepsilon_0(U/x_1)^2$. 0,5
Bedenkend dat $\frac{S}{2}\varepsilon_0(U/x_1)^2 = k(x_0 - x_1)$, krijg je dan $\delta F_e = 2\frac{x}{x_1}(x_0 - x_1)$.
de veerkracht verandert ook $\delta F_k = -kx$. De veranderingen werken elkaar tegen, dus
$\delta F = -kx\left[1 - 2\left(\frac{x_0}{x_1} - 1\right)\right] = -kx\left(3 - 2\frac{x_0}{x_1}\right)$. En dan $\ddot{x} = \delta F/m = -x\frac{k}{m}\left(3 - 2\frac{x_0}{x_1}\right)$ en
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}\left(3 - 2\frac{x_1}{x_0}\right)}$. 0,5

d. Er zijn nu 2 periodiek veranderende grootheden, $x$ en $q$. Met Kirchhoff noteren we: 0,5
$L\ddot{q} = -\frac{q}{C}xQ\frac{d}{dx_1}C^{-1}$. De 2^e term beschrijft de spanningsverandering op de condensator door de verandering in capaciteit. Bedenk dat $C^{-1} = x_1/S\varepsilon_0$ en $Q = S\varepsilon_0/x_1$,
dus $\frac{d}{dx_1}C^{-1} = 1/S\varepsilon_0$ en $L\ddot{q} = -\frac{q}{C} - U\frac{x}{x_1}$.
Het teken van de tweede term gaat ervan uit dat de $x$-as omhoog gericht is. (er is geen stroom in de spoel als en $L\ddot{q} = 0$ als de spanning op de condensator constant blijft.: bij toenemende lading $q > 0$, veronderstelt dit toenemende capaciteit, ofwel $x < 0$, in overeenstemming met de tekens in de formule).
Als 2^e nemen we de tweede wet van Newton: Voor $F_e$ kunnen we schrijven $F_e = -Q^2/2S\varepsilon_0$.
Als de lading op de plaat niet verandert ($q = 0$), verandert $F_e$ ook niet. 0,5
Dus $\delta F_e = q\frac{d}{dQ}Q^2/2S\varepsilon_0 = qQ/S\varepsilon_0$. De kleine krachtveranderingen kun je eenvoudig optellen
$m\ddot{x} = -kx - qQ/S\varepsilon_0$
We moeten nu een sinus-oplossing vinden met frequentie $\omega$, zo dat $\ddot{x} = -\omega^2 x$ en $\ddot{q} = -\omega^2 q$. Dit substitueren we in de twee vergelijkingen:

$$\begin{cases}(L\omega^2 - C^{-1})q = xU/x_1 \\ (\omega^2 m - k)x = qQ/S\varepsilon_0\end{cases}$$

Dit geeft alleen een niet triviale oplossing als $(L\omega^2 - C^{-1})(\omega^2 m - k) = UQ/x_1 S\varepsilon_0$.
Bedenkend dat $UQ/x_1 = 2k(x_0 - x_1)$ en $C = \varepsilon_0 S/x_1$, kunnen we de vgl herschrijven als:
$(\varepsilon_0 SL\omega^2 - x_1)(\omega^2 m - k) = 2k(x_0 - x_1)$ 0,5
met $\omega_0^2 = k/m$ en $\omega_1^2 = x_1/\varepsilon_0 SL$ krijgen we dan
$\omega^4 - \omega^2(\omega_1^2 + \omega_0^2) + \omega_0^2\omega_1^2\left(3 - 2\frac{x_0}{x_1}\right) = 0$.
en $2\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_0^2 \pm \sqrt{\omega_1^4 + \omega_0^4 + 2\omega_1^2\omega_0^2(x_0 x_1^{-1} - 5)}$,
Dit systeem heeft twee eigenfrequenties als $\frac{x_0}{x_1} < \frac{3}{2}$ en is verder instabiel.

## 6. Zuigen (3pt)

(es2006)

a. Neem $x$ horizontaal en $y$ verticaal . Neem $\delta(x)$ de hoogte van het vloeistofoppervlak. Aan het vloeistofoppervlak is de potentiele energie per volume-eenheid constant. $U = \rho_m g\delta - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho_e \frac{q}{r} = 0$, 0,5
met $r = \sqrt{x^2 + (\delta - h)^2}$ de afstand van het gegeven punt tot de lading. Neem $\delta_0 = \delta(0)$.
Dan $\delta_0(\delta_0 - h) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_e q}{\rho_m g} = 0$, herschrijven levert op $\delta_0 = \frac{1}{2}\left(h - \sqrt{h^2 - 4\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_e q}{\rho_m g}}\right)$ 0,5

b. Het stromen start op $x = 0$ waar het vloeistofoppervlak het hoogst is.
Als het stromen start bereikt dat punt met coördinaten $(0, \delta_0)$ de hoogste potentiele energie 0,5
bewegend langs de y-as naar de lading. Dan $U(y) = \rho_m g y - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho_e q/(h - y)$ heeft een maximum bij $y = h_0$. Dat levert twee vgln op:
$\rho_m g h_0 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho_e q/(h - h_0) = 0$ en $\rho_m g - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho_e q/(h - h_0)^2 = 0$ 1
Als we deze vergelijken, vinden we $h = 2h_0$ en $h_0^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho_e q/\rho_m g$ en dus $h = \sqrt{\rho_e q/\pi\varepsilon_0\rho_m g}$. 0,5

## 7. Magnetische puls (3pt)

(es 2009)

Omdat we de inductantie van de spoel mogen verwaarlozen, werkt hij als een spanningbron met spanning $U = NSB/\tau = 1$ V tussen 0 en 10 ms, en verder 0 V. De karakteristieke tijden voor de de circuits zijn $\tau_1 = R_1 C = 0{,}6$ s en $\tau_2 = L/R_2 \approx 0{,}3$ s zodat voor beide circuits de processen erg snel gaan en de capaciteit effectief is kortgesloten en bijna alle spanning over de inductie staat.

a. Gegeven bovenstaande, geldt $I_1 = U/R_1 \approx 0{,}33$ A. Voor $I_2$ geldt, die gaat groeien van 0 A op $t = 0$ met een snelheid gegeven door $L\frac{dI}{dt} = U$, ofwel $I_2 = Ut_1/L = 5$ mA. 1

b. Als $U$ wordt afgezet, houdt de condensator (bijna geheel omdat $t_2 - \tau \ll R_1 C$) de opgebouwde lading 0,5
$Q = I_1\tau$. De spanning van de condensator ($Q/C$) staat over $R_1$ zodat $I_1' = Q/R_1 C = U\tau/R_1^2 C \approx 5{,}6$ mA. De inductie houdt (bijna geheel, omdat $t_2 - \tau \ll L/R_2$) de stroom die hij 0,5
gedurende de eerste 10 ms had, $I_2' = U\tau/L = 10$ mA.

c. Omdat de stroom in $R_2$ langzaam vermindeert, vergeleken met de groei in de eerste 10 ms, kunnen we 0,5
de stroom gedurende $t < \tau$ verwaarlozen. We kunnen de wet van Kirchhoff dan schrijven als $L\frac{dI}{dt} + R_2\frac{dq}{dt} = 0$ wat oplevert: $LdI + R_2 dq = 0$ en $L\Delta I = -R_2\Delta q$. Omdat $\Delta I = -I_2'$ krijgen we
$\Delta q = LI_2'/R_2 = 3{,}3$ mC. 0,5

## 8. Met een lens branden (3pt)

Es 2013

a. De energieflux van de zon die door de lens wordt gefocusseerd kun je berekenen via $P = \frac{\pi}{4}d^2 I$; Het beeld van de zon straalt met de wet van Stefan-Boltzmann een totaal vermogen uit van $P = A\sigma T^4 =$ 0,5
$\frac{\pi}{4}(\alpha f)^2\sigma T^4$. Met de WvBvE geeft dit $\frac{\pi}{4}d^2 I = \frac{\pi}{4}(\alpha f)^2\sigma T^4$, zodat $T = \sqrt{\frac{d}{\alpha f}\sqrt{\frac{I}{\sigma}}} \approx 4500\text{K}$. 1

b. Met de 2[e] wet van de thermodynamica weet je dat het niet mogelijk is om energie vanaf een vwp met lagere temperatuur naar een vwp met hogere temperatuur te transporteren. Dichtbij de zon geldt
$I_0 = \sigma {T_0}^4$ met een totale flux: $P_t = 4\pi R_s^2 I_0$ met $R_s$ de straal van de zon. Dichtbij aarde geldt 0,5
$P_t = 4\pi L^2 I$ met $L$ de straal van de baan van de aarde rond de zon. Dit levert $I = I_0 {R_s^2}/{L^2}$, dit met het
vorige resultaat levert: $T = T_0\sqrt{\frac{d}{\alpha f}\frac{R_s}{L}}$. 0,5
Bedenk dat $\alpha L = 2R_s$, zodat $T = T_0\sqrt{\frac{d}{2f}} \le T_0$, wat betekent dat moet gelden dat $d \le 2f$ 0,5

## 9. Relativistisch glas (3pt)

(tentamen NS101B 2003)

a. $n = 1$ dan $T = \frac{L}{c}$ 0,5

b. $\beta = 0$ dan $T = \frac{L-d_0}{c} + \frac{d_0}{\frac{c}{n}} = \frac{L}{c} + \frac{d_0}{c}(n-1)$ 0,5

c. $t'_{uit} - t'_{in} = n\frac{d_0}{c}$ 0,5

d.

$x_{in} = \gamma(x'_{in} + vt'_{in}) = \gamma v t'_{uit}$

$t_{in} = \gamma\left(t'_{in} + \frac{v}{c^2}x'_{in}\right) = \gamma t'_{in}$ zodat natuurlijk $x_{in} = vt_{in}$; ook is $t'_{in}$ een eigentijd.

$x_{uit} = \gamma(x'_{uit} + vt'_{uit}) = \gamma d_0 + \gamma v t'_{uit}$

$t_{uit} = \gamma\left(t'_{uit} + \frac{v}{c^2}x'_{uit}\right) = \gamma v t'_{uit} + \gamma\beta\frac{1}{c}d_0$ 0,5

zodat $t_{uit} - t_{in} = \gamma(t'_{uit} - t'_{in}) + \gamma\beta\frac{d_0}{c} = \gamma\frac{1}{c}nd_0 + \gamma\beta\frac{1}{c}d_0 = \frac{nd_0}{c}\gamma\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)$

e.

$x_{uit} - x_{in} = \gamma d_0 + \gamma v(t'_{uit} - t'_{in}) = \gamma d_0 + \gamma v\frac{nd_0}{c} = \gamma d_0(1 + \beta n)$

Zodat

$\frac{x_{uit}-x_{in}}{t_{uit}-t_{in}} = c\left(\frac{1+\beta n}{n+\beta}\right)$, 0,5

$v_{som} = \frac{\frac{c}{n}+\beta c}{1+\frac{1}{c^2}\frac{c}{n}\beta c} = c\left(\frac{\frac{1}{n}+\beta}{1+\frac{\beta}{n}}\right) = c\left(\frac{1+\beta n}{n+\beta}\right)$.

f.

$T = t_B - t_A = \frac{1}{c}(x_{in} - x_A) + (t_{uit} - t_{in}) + \frac{1}{c}(x_B - x_{uit})$

$= \frac{1}{c}(x - x_A) + \frac{1}{c}(x_{uit} - x_{in}) + (t_{uit} - t_{in})$

$= \frac{L}{c} - \frac{\gamma d_0}{c}(1 + \beta n) + \frac{\gamma d_0}{c}(n + \beta)$

$= \frac{L}{c} - \frac{\gamma d_0}{c}(n + \beta - 1 - \beta n)$

$= \frac{L}{c} - \frac{\gamma d_0}{c}(n-1)(1-\beta)$ 0,5

$= \frac{L}{c} + (n-1)\frac{d_0}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$

## 10. Een bal de lucht in (3pt)

A rollend op bodem, B bovenin baan, C bovenaan hoogste punt. Er zijn geen niet-conservatieve krachten (statische wrijving verricht geen arbeid) dus $E_A = E_B = E_C$ 0,5

$E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}I\omega_A^2$ (neem zwaarte-energie 0 daar)

$\frac{1}{2}I\omega_A^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v_A}{r}\right)^2 = \frac{1}{5}mv_A^2$ 0,5

$E_A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{v}\right)\frac{1}{5}mv_A^2 = \frac{7}{10}mv_A^2$ $\quad E_B = \frac{7}{10}mv_B^2 + mgR \quad E_A = E_B \rightarrow \frac{7}{10}mv_A^2 = \frac{7}{10}mv_B^2 + mgR$ 0,5

$v_B^2 = v_A^2 - \frac{10}{7}gR$ , invullen levert $v_B = 1{,}8$ m/s.

$E_C = mgh + \frac{1}{2}I\omega_C^2$ , met $\omega_C = \omega_B$ $\quad \frac{1}{2}I\omega_C^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v_C}{r}\right)^2 = \frac{1}{5}mv_C^2 = \frac{1}{5}mv_B^2$ 0,5

$E_C = mgh + \frac{1}{5}mv_B^2$ $\quad E_C = E_B \rightarrow \frac{7}{10}mv_B^2 + mgR = mgh + \frac{1}{5}mv_B^2$ 0,5

$gh = \left(\frac{7}{10} - \frac{1}{5}\right)v_B^2 + gR$ $\quad h = \frac{v_B^2}{2g} + R = R + \frac{1}{2g}\left(v_A^2 - \frac{10}{7}gR\right) = \left(1 - \frac{5}{7}\right)R + \frac{v_A^2}{2g} = 0{,}81$ m. 0,5