De 34^{e} Internationale Natuurkunde Olympiade Taipei, Taiwan
Theorie-toets
Maandag 4 augustus 2003

Lees dit eerst!

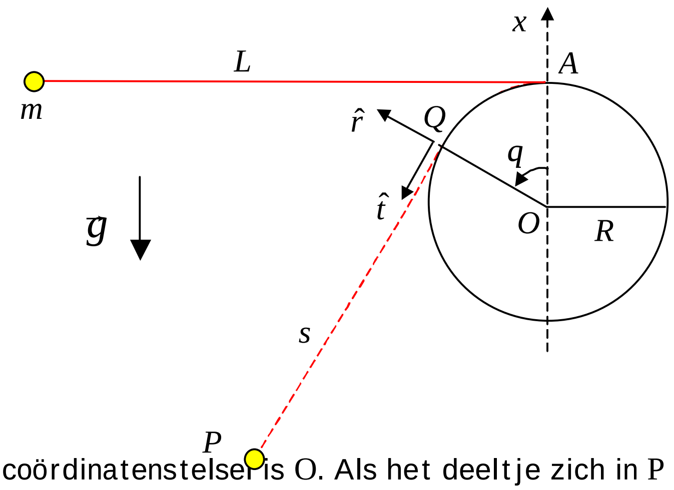
1. De toets duurt 5 uur en bestaat uit drie vraagstukken. Vraag 1 telt voor 12 punten, vraag 2 voor 10 punten en vraag 3 voor 8 punten.
2. Gebruik uitsluitend de pen uit je rugtas.
3. Beschrijf uitsluitend de voorkant van het papier: beschrijf dus niet de kant waar een kruis op staat.
4. Maak elke opgave op een nieuw blad.
5. Behalve de blanco bladen waar je op mag schrijven, is er een antwoordblad waarop de antwoorden moeten worden samengevat. Geef numerieke resultaten weer met een verantwoord aantal significante cijfers. Vergeet ook de eenheden niet.
6. Op de blanco bladen mag je uiteraard alles schrijven waarvan je denkt dat het belangrijk is voor het oplossen van het vraagstuk. Gebruik echter zoveel mogelijk vergelijkingen, symbolen en tekeningen. Gebruik dus slechts zoveel tekst als nodig is.
7. Bovenaan elk blad moet je het **land** en je **studentnummer** invullen. Vul verder in: het nummer van de opgave; het paginanummer (page no.) en het totaal aantal blanco bladen (total no. of pages) dat je hebt gebruikt en dat nagekeken moet worden. Noteer ook aan het begin van elk blad het nummer en het onderdeel van de vraag waarmee je bezig bent. Zet een kruis door alle andere beschreven bladen die niet nagekeken hoeven te worden. Neem deze bladen ook niet op in de nummering van de bladen.
8. Leg aan het eind alle bladen in de juiste volgorde: per vraagstuk eerst het antwoordblad, daarna de blanco bladen die nagekeken moeten worden en dan de bladen die niet nagekeken hoeven te worden. Leg de stapeltjes op volgorde van vragen en bundel deze bladen. Leg de onbeschreven bladen en de opgaven helemaal onderaan. Stop de bladen in de daarvoor bestemde enveloppe. Laat alles op je tafel achter. Je mag geen enkel blad meenemen.

Vraag 1

Een slinger aan een vallende massa

Een cilindrische staaf met straal R wordt horizontaal boven de grond vastgehouden. Een massa m is met een draad met verwaarloosbare massa en lengte L ($L > 2pR$) aan de bovenkant van de staaf verbonden (zie figuur 1.a). De massa wordt losgelaten als de draad horizontaal strak gespannen is. Veronderstel dat de massa puntvormig is en uitsluitend in het vlak loodrecht op de as van de staaf beweegt. De massa noemen we in het vervolg het “deeltje”. De versnelling van de zwaartekracht is $\vec{g}$.

Figuur 1a



De oorsprong van het coördinatenstelsel is O. Als het deeltje zich in P bevindt, raakt de draad in Q aan de cilinder. De lengte van het draadstuk PQ is s. De richtingsvector in Q van de draad is $\hat{t}$; de richtingsvector loodrecht op de draad is $\hat{r}$. De hoek $?$ tussen de straal OQ en de verticaal is positief bij een draaiing tegen de wijzers van de klok in. Als $? = 0$, is $s = L$ en stellen we de potentiële energie U ten gevolge van de zwaartekracht van het deeltje nul. Tijdens de beweging van het deeltje worden de verandering per tijdseenheid van $?$ en s gegeven door $\dot{q}$ en $\dot{s}$.
Alle snelheden worden bepaald ten opzichte van het vaste punt O, tenzij is aangegeven dat een ander stelsel bedoeld wordt.

Deel A

In deel A staat de draad strak tijdens de beweging van het deeltje.
Bereken het volgende, uitgedrukt in de hierboven gedefinieerde grootheden: s, $?$, $\dot{s}$, $\dot{q}$, R, L, g, $\hat{t}$ of $\hat{r}$.

(a) De relatie tussen $\dot{q}$ en $\dot{s}$.

[0,5 pt]

(b) De snelheid $\vec{v}_Q$ van het bewegende punt Q ten opzichte van O.

[0,5 pt]

(c) De snelheid $\vec{v}\,'$ van het deeltje ten opzichte van het bewegende punt Q als het deeltje in P is.

[0,7 pt]

(d) De snelheid $\vec{v}$ van het deeltje ten opzichte van het punt O als het deeltje in P is.

[0,7 pt]

(e) De $\hat{t}$-component van de versnelling van het deeltje ten opzichte van O als het zich in P bevindt.

[0,7 pt]

(f) De potentiële energie U van de zwaartekracht van het deeltje als het zich in P bevindt. [0,5 pt]

(g) De snelheid v_m als het deeltje zich in het laagste punt van de baan bevindt.

[0,7 pt]

Deel B.

In deel B geldt voor de verhouding $\frac{L}{R}$ het volgende:

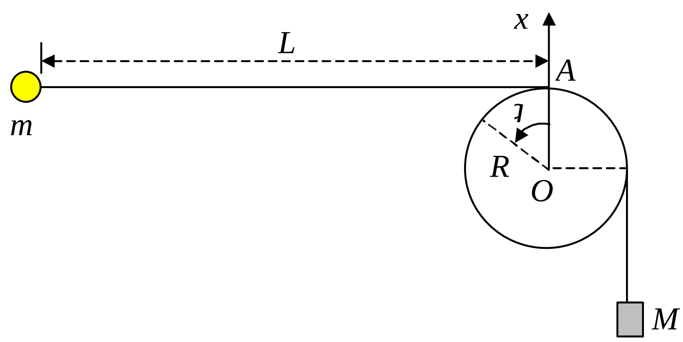
$$\frac{L}{R} = \frac{9p}{8} + \frac{2}{3}\cot\frac{p}{16} = 3{,}534 + 3{,}352 = 6{,}886$$

(h) Bereken de snelheid v_S van het deeltje (uitgedrukt in g en R) als het draadstuk QP de kleinste lengte heeft terwijl het nog wel recht is. [2,4 pt]

(i) Bereken de snelheid v_H van het deeltje (uitgedrukt in g en R) als dit zich bevindt in het hoogste punt van de baan aan de andere kant van de staaf als vanwaar het is losgelaten [1,9 pt]

Deel C.

In deel C is de slinger met massa m verbonden met een draad aan een blok met een grotere massa M. De draad is niet meer vastgemaakt in A. Ook de grotere massa kan als een deeltje worden opgevat.



Figuur 1b

In het begin wordt de slingermassa m zo vastgehouden dat het deel van de draad met lengte L horizontaal staat. Dan wordt de slingermassa vanuit rust losgelaten. Tegelijkertijd begint daardoor ook het blok M te vallen. Veronderstel dat het slingergewicht in het verticale vlak voorbij het vallende blok M kan bewegen zonder dat het daarbij door het blok gehinderd wordt. De kinetische wrijving tusen draad en de staaf wordt verwaarloosd. Maar als het blok M eenmaal stilstaat, blijft het stilstaan tengevolge van de statische wrijving.

(j) Stel dat het blok M tot stilstand komt nadat het over een afstand D is gevallen. Veronderstel dat $(L - D) >> R$. Het blijkt nu dat als het deeltje om de staaf heen beweegt tot $q = 2p$ terwijl beide delen van de draad nog recht zijn, de verhouding $a = \dfrac{D}{L}$ niet kleiner mag zijn dan de grenswaarde a_c. Bereken een benaderde waarde voor a_c uitgedrukt in $\dfrac{M}{m}$ waarbij termen evenredig met $\dfrac{R}{L}$ en hogere orde termen van $\dfrac{R}{L}$ worden verwaarloosd. [3,4 pt]

Antwoordblad **Vraag 1**

a. De relatie tussen $\dot{q}$ en $\dot{s}$ is

b. De snelheid $\vec{v}_Q$ van het bewegende punt Q ten opzichte van O is

c. De snelheid $\vec{v}\,'$ van het deeltje ten opzichte van het bewegende punt Q als het deeltje in P is

d. De snelheid $\vec{v}$ van het deeltje ten opzichte van het punt O als het deeltje in P is

e. De $\hat{t}$-component van de versnelling van het deeltje ten opzichte van O als het zich in P bevindt is

f. De potentiële energie U van de zwaartekracht van het deeltje als het zich in P bevindt is

g. De snelheid v_m als het deeltje zich in het laagste punt van de baan bevindt is

h. De snelheid v_S van het deeltje (uitgedrukt in g en R) als het draadstuk QP de kleinste lengte heeft terwijl het nog wel recht is, is

i. De snelheid v_H van het deeltje (uitgedrukt in g en R) als dit zich bevindt in het hoogste punt van de baan aan de andere kant van de staaf als vanwaar het is losgelaten, is

j. De benaderde waarde voor de grenswaarde a_c, uitgedrukt in $\frac{M}{m}$ is

Opgave 2.

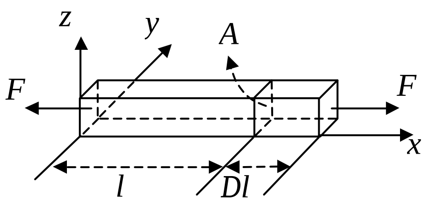
Een piezo-elektrisch kristal resonator aangesloten op een wisselspanning

Beschouw een uniforme staaf met lengte l en doorsnede A (zie figuur 2a). Als op beide uiteinden van de staaf, loodrecht op de doorsneden, twee evengrote maar tegengestelde krachten F worden uitgeoefend, neemt de lengte van de staaf toe met Δl.
De *rekspanning* T wordt gedefinieerd als $T = F/A$. De *rek* S wordt gedefinieerd als $S = \Delta l/l$.
Volgens de wet van Hooke geldt nu:

$$T = Y S \text{ of } \frac{F}{A} = Y\frac{D\ell}{\ell} \qquad (1)$$

Waarin Y de modulus van Young is van het materiaal waar de staaf van gemaakt is. Merk op dat bij samendrukking $F < 0$ en dat derhalve $\Delta l < 0$. De rekspanning is in dat geval negatief en hangt met de druk p samen volgens $T = -p$.
Voor een uniforme staaf met dichtheid r wordt de voortplantingssnelheid u van longitudinale golven (dus geluidsgolven) gegeven door
$u = \sqrt{Y/r}$.

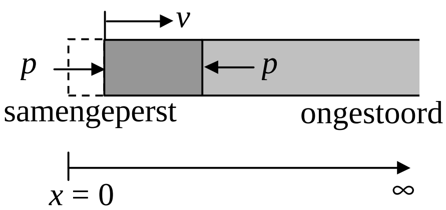
Figuur 2a



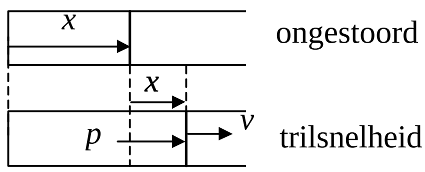
(2)

Veronderstel dat de golven niet gedempt worden, dus geen energie verliezen.

Deel A (mechanische eigenschappen)
De positie van de linkerkant van een uniforme staaf is $x = 0$. Aan de rechterkant strekt de staaf zich uit tot in het oneindige (zie figuur 2.b). De staaf heeft een dichtheid r.
In het begin is de staaf in rust en wordt er geen kracht op uitgeoefend. Daarna oefent een zuiger gedurende een korte tijd Δt een kleine druk p uit op het linkervlak van de staaf, waardoor een drukgolf met een snelheid u naar rechts beweegt.



Figuur 2b



Figuur 2c

(a) Ten gevolge van de zuiger beweegt de linkerkant van de staaf met een constante snelheid v naar rechts (zie figuur 2.b). Bereken de rek S en de druk p gedurende het tijdsinterval Δt.

Antwoorden moeten uitsluitend gegeven worden in termen van r, u en v.

[1,6 pt]

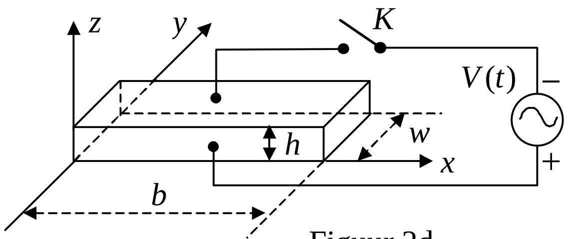
(b) Beschouw een longitudinale golf, die door de staaf naar rechts beweegt (zie figuur 2.c). De trillingen ten gevolge van de golf hebben op de plaats x en op het tijdstip t een uitwijking

$$x(x,\, t) = x_0 \sin k(x - u\,t) \qquad (3),$$

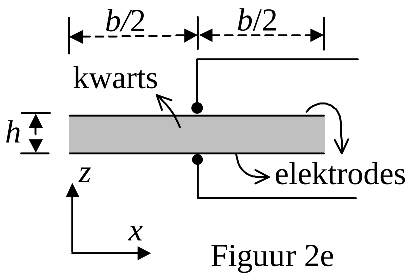
waarin x_0 en k constanten zijn. Bereken de snelheid $v(x,\, t)$, de rek $S(x,\, t)$ en de druk $p(x,\, t)$ als functies van x en t.

[2,4 pt]

Deel B (elektromagnetische eigenschappen – inclusief piëzo-elektrisch effect)
Beschouw een plaatje van kwartskristal met lengte b, dikte h en breedte b (zie figuur 2.d). Op het boven- en ondervlak worden elektroden aangebracht met behulp van een dunne metaallaag. De elektrische draden die in het midden van de elektroden zijn gesoldeerd fungeren ook als bevestigingspunten die voor staande, longitudinale golven in



Figuur 2d



Figuur 2e

de x-richting als vaste punten beschouwd mogen worden.

Het kwartskristal heeft een dichtheid r = 2.65×10^3 kg/m^3 en een modulus van Young Y = 7.87×10^{10} N/m^2. Het plaatje heeft een lengte b = 1,00 cm. De breedte w en de hoogte h zijn zeer veel kleiner dan de lengte b. Terwijl de schakelaar K (in figuur 2.d) open staat, worden in de x-richting uitsluitend staande longitudinale golven opgewekt. Dan geldt voor de uitwijking van een staande golf met frequentie $f = w/2p$ op plaats x en tijdstip t:

$$x(x,\, t) = 2x_0\, g(x) \cos w\, t \qquad (0 \le x \le b) \qquad (4a).$$

Hierin is x_0 een positieve constante en is $g(x)$ een plaatsfunctie van de vorm:

$$g(x) = B_1 \sin k(x - \frac{b}{2}) + B_2 \cos k(x - \frac{b}{2}). \qquad (4b).$$

met maximum 1 en $k = w/u$. Merk op dat de middens van de elektroden stilstaan en dat de linker- en rechterkant van het plaatje vrij bewegen zodat daar de rekspanning (of druk) nul moet zijn.

(c) Bereken de waarden B_1 en B_2 in vergelijking (4.b) voor een longitudinale staande golf in het kwartsplaatje.

[1,2 pt]

(d) Bereken de twee laagste frequenties van de longitudinale staande golven die in het kwartsplaatje kunnen optreden.

[1,2 pt]

Het *piëzo-elektrisch* effect is een speciale eigenschap van een *kwarts*kristal. Samendrukken of uitrekken van het kristal veroorzaakt elektrische spanningen tussen tegenover elkaar liggende vlakken en omgekeerd veroorzaakt een aangelegde spanning, afhankelijk van de polariteit, het samentrekken of uitrekken van het kristal. Op deze manier kunnen mechanische en elektrische trillingen gekoppeld worden om het kristal in resonantie te brengen. Als er op het boven- en ondervlak ladingsdichtheden van respectievelijk $-s$ en $+s$ zijn, heerst er in het kwartsplaatje een elektrisch veld E in de z-richting. Voor de rekspanning T en de rek S in de x-richting gelden dan de volgende vergelijkingen:

$$S = (1/Y)T + d_p E \qquad (5a)$$

$$s = d_p T + e_T E \qquad (5b)$$

Waar $1/Y = 1.27\times10^{-11}$ m^2/N, is de elastische compliance (dus de inverse van de Young modulus) bij een constant elektrisch veld, $e_T = 4.06\times10^{-11}$ F/m (de permittiviteit bij constante rekspanning) en $d_p = 2.25\times10^{-12}$ m/V (de piëzo-elektrische constante). Schakelaar K in figuur 2.d wordt nu gesloten. Een wisselspanning $V(t) = V_m \cos wt$ wordt nu op de elektroden aangesloten zodat een uniform elektrisch veld $E(t) = V(t)/h$ in de z-richting van het kwartsplaatje heerst. In een stabiele situatie ontstaat er een longitudinale staande golf met hoekfrequentie w in de x-richting. Omdat E uniform is, geldt voor de golflengte l en de frequentie f van de staande golf $l = u/f$ met u gegeven volgens vergelijking 2. Maar zoals de vergelijking (5.a) laat zien is $T = YS$ niet langer meer geldig, ofschoon de definities van rekspanning en rek dezelfde zijn en de eindvlakken van het plaatje nog steeds vrij kunnen bewegen zodat de rekspanning daar dus nul is.

(e) Bereken, uitgaande van de vergelijkingen 5.a en 5.b de constanten D_1 en D_2 in de uitdrukking van de oppervlaktelading formule.

$$s(x,t) = \left[D_1 \cos k\left(x - \frac{b}{2}\right) + D_2\right]\frac{V(t)}{h}, \text{ met } k = w/u$$

[2,2 pt]

(f) De totale oppervlaktelading $Q(t)$ op de benedenelektrode uitgedrukt in $V(t)$ heeft de vorm :

$$Q(t) = [1 + a^2(\frac{2}{kb}\tan\frac{kb}{2} - 1)]C_0 V(t) \qquad (6)$$

Bereken a^2 (uitdrukking en waarde) en C_0 (alleen uitdrukking)

[1,4 pt]

Antwoordvel

vraag 2

Geef overal waar daar naar gevraagd wordt, elk antwoord in de vorm van een analytische uitdrukking, gevolgd door een numerieke waarde met eenheden. Bijvoorbeeld oppervlakte van een cirkel: A = πr^2 = 1,23 m^2.

(a) De rek S en de druk p op het linkervlak zijn (*in termen van* r, u *en* v.)

$S =$
$p =$

(b) De snelheid $v(x, t)$, de rek $S(x, t)$ en de druk $p(x, t)$ zijn

$v(x, t) =$
$S(x, t) =$
$p(x, t) =$

(c) De waarden van B_1 en B_2 zijn

$B_1 =$
$B_2 =$

(d) De twee laagste frequenties van de longitudinale staande golven *(uitdrukking en waarde)*

De laagste
De een na laagste

(e) De uitdrukkingen voor D_1 en D_2 zijn

$D_1 =$
$D_2 =$

(f) De constanten a^2 *(uitdrukking en waarde)* en C_0 zijn (alleen *uitdrukking*)

$a^2 =$
$C_0 =$

Vraag 3

Deel A

Massa van een neutrino en verval van een neutron

Een vrij neutron met massa m_n is in rust t.o.v. een assenstelsel verbonden met laboratorium en vervalt tot drie niet-interagerende deeltjes: een proton, een elektron en een anti-neutrino. De rustmassa van het proton is m_p als de rustmassa het anti-neutrino gelijk is aan m_n . De rustmassa van het anti-neutrino m_n wordt ondersteld verschillend van nul en veel kleiner dan de rustmassa van het elektron m_e .
De lichtsnelheid bij vacuüm is gelijk aan c.
De gemeten waarden van de massa's zijn gelijk aan:

$m_n = 939{,}56563\ \mathrm{MeV}/c^2$
$m_p = 938{,}27231\ \mathrm{MeV}/c^2$
$m_e = 0{,}5109907\ \mathrm{MeV}/c^2$

Alle energiewaarden en snelheden worden beschouwd t.o.v. het laboratoriumsysteem. Stel dat de totale energie van het vrijgekomen elektron uit het vervalproces gelijk is aan E.

a) Bepaal de mogelijke maximale waarde E_{max} van E en de waarde van de snelheid v_m van het anti-neutrino als $E = E_{max}$.
Druk beide antwoorden uit in functie van de rustmassa's van de deeltjes en de lichtsnelheid.
Bereken E_{max} en de verhouding v_m / c met 3 significante cijfers als volgende voorwaarde geldt $m_n < 7{,}3\ \mathrm{eV}/c^2$.

[4,0 pt]

Deel B

Levitatie door licht

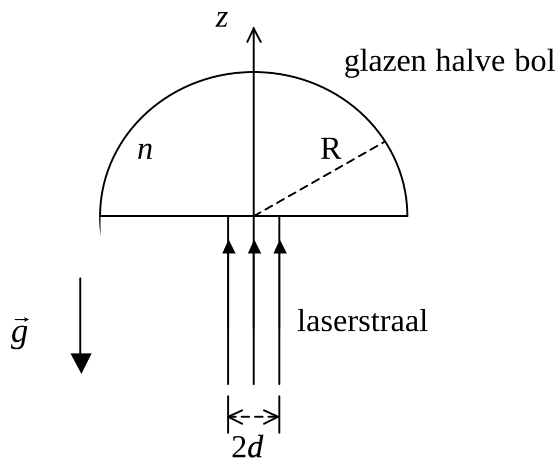
Een doorzichtige glazen halve bol met straal R en massa m heeft een brekingsindex n . De brekingsindex van de middenstof buiten deze halve bol is gelijk aan 1. Een evenwijdige monochromatische laserbundel valt gelijkmatig en loodrecht in op het centrale deel van het vlakke oppervlak (zie figuur 3.a).
De gravitatieversnelling $\vec{g}$ is vertikaal naar en naar beneden gericht. De straal d van de cirkelvormige doorsnede van de laserbundel is veel kleiner dan R. De as van de glazen halve bol en de laserbundel zijn symmetrisch gericht t.o.v. van de z-as.
De glazen halve bol absorbeert in het totaal geen laserlicht. Het oppervlak is bedekt met een dunne laag transparant materiaal zodat de terugkaatsingen van het invallende en het uitgaande licht verwaarloosbaar zijn. De optische weglengte van het laserlicht bij doorgang van het niet-reflecterend oppervlak van de deklaag is ook verwaarloosbaar.

b) Bepaal het minimale vermogen P_{min} van het laserlicht dat vereist is om de glazen halve bol in evenwicht te houden. Verwaarloos de termen van de orde $(d/R)^3$ of hoger.

Hint: $\cos q \approx 1 - q^2/2$ als ? veel kleiner is dan 1

[4,0 pt]

Figuur 3a



Antwoordblad **Vraag 3**

Geef steeds je antwoord de analytische uitdrukking gevolgd door de numerieke waarde en de eenheid. Bijvoorbeeld: oppervlakte van een cirkel $A = p\ r^2 = 1{,}23\ \mathrm{m}^2$

a) (Geef de uitdrukkingen in functie van de rustmassa's van de deeltjes en de lichtsnelheid)
De maximale energie van het elektron is (uitdrukking en waarde)

$\mathrm{E}_{\mathrm{max}} =$

De verhouding van de snelheid van het anti-neutrino tot c als $E = E_{max}$ (uitdrukking en waarde)

$v_m / c =$

b) Het vermogen van laser dat vereist is om de glazen halve bol op te heffen is

$P =$