De 35^{e} Internationale Natuurkunde Olympiade

Pohang, Zuid-Korea

Theorie-toets

Zaterdag 17 juli 2004

duur: 5 uur

Lees dit eerst!

1. De toets duurt 5 uur en bestaat uit drie vraagstukken.
2. Gebruik uitsluitend de door de organisatie ter beschikking gestelde pen.
3. Beschrijf uitsluitend de voorkant van het papier. Schrijf uitsluitend binnen het kader
4. Maak elke opgave op een nieuw blad.
5. Behalve de ***blanco bladen*** waar je op mag schrijven, is er een ***antwoordblad*** waarop de antwoorden *moeten* worden samengevat. Geef numerieke resultaten weer met een verantwoord aantal significante cijfers.
6. Op de blanco bladen mag je uiteraard alles schrijven waarvan je denkt dat het belangrijk is voor het oplossen van het vraagstuk. Gebruik echter zoveel mogelijk vergelijkingen, numerieke waarden, tekeningen en grafieken. Gebruik dus zo weinig mogelijk tekst.
7. Bovenaan elk blad moet je het **land (Country Code)** en je **studentnummer (Student Code)** invullen. Vul verder in: het nummer van de opgave (**Question Number**); het paginanummer (**Page Number)** en het totaal aantal blanco bladen (**Total Number of Pages**) dat je hebt gebruikt en dat nagekeken moet worden. Noteer ook aan het begin van elk blad het nummer en het onderdeel van de vraag waarmee je bezig bent. Zet een kruis door alle andere beschreven bladen die niet nagekeken hoeven te worden. Neem deze bladen ook niet op in de nummering van de bladen.
8. Leg aan het eind alle bladen in de *juiste volgorde*:
   - per vraagstuk eerst het *antwoordblad*,
   - daarna de *beschreven bladen* die nagekeken moeten worden en
   - dan de bladen die niet nagekeken hoeven te worden.
   - Ongebruikte bladen en de opgaven

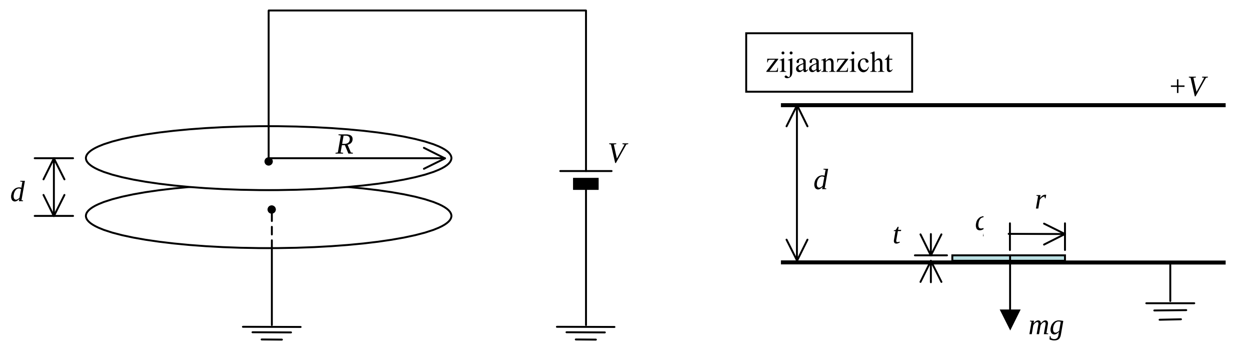
   Stop de bladen in de daarvoor bestemde enveloppe. Laat alles op je tafel achter. Je mag *geen* enkel blad meenemen.

Vraag 1

'Ping-pong' weerstand

Een condensator bestaat uit twee parallelle platen. Beide hebben een straal R, de afstand tussen de platen is d met $d << R$ (zie fig. 1.1 (a)). De bovenste plaat is verbonden met een bron met *constante* spanning V, de onderste plaat is geaard. Dan wordt een dunne en kleine schijf met massa m, straal r ($<< R,d$) en dikte t ($<< r$) in het midden van de onderste plaat gelegd zoals gegeven is in fig. 1.1 (b).

We nemen aan dat de ruimte tussen de platen vacuüm is met een diëlektrische constante ε_0. De platen en de schijf zijn gemaakt uit perfect geleidend materiaal. Alle elektrostatische effecten aan de randen kunnen verwaarloosd worden. De inductantie van de hele schakeling en relativistische effecten mogen verwaarloosd worden. Ook spiegelbeeldladingseffecten mogen verwaarloosd worden.



(a) (b)

Fig. 1.1 (a) Schematische voorstelling van een parallelle plaatcondensator verbonden met een spanningsbron met constante spanning.
Fig. 1.1 (b) Zijaanzicht van de parallelle *platen* met een kleine *schijf* in het midden van de condensator (zie de tekst voor details).

(a) [1,2 punten] Bereken de elektrostatische kracht F_p die de *platen* op elkaar uitoefenen als ze op een afstand d van elkaar staan (fig. 1.1 (a)) vóórdat de schijf wordt ingebracht.

(b) [0,8 punten] Als de schijf op de onderste plaat gelegd wordt, wordt het verband tussen de lading q op de schijf (fig. 1.1 (b)) en de spanning V gegeven door $q = \chi.V$.
- Leid de uitdrukking voor χ als functie van r, d en ε_0.

(c) [0,5 punten] De parallelle platen staan loodrecht op het zwaartekrachtveld g dat homogeen verondersteld mag worden. Om de schijf, die oorspronkelijk in rust is, op te tillen, moet de aangelegde spanning hoger zijn dan de drempelwaarde V_{th} (*treshhold* waarde).

- Leid de uitdrukking voor V_{th} af als functie van m, g, d en χ.

(d) [2,3 punten] Als $V > V_{th}$ zal de schijf op en neer bewegen tussen de platen. (Neem aan dat de schijf uitsluitend verticaal beweegt en *niet wiebelt*). De botsingen tussen de schijf en de platen zijn inelastisch. De restitutiecoëffiënt is $\eta \equiv (v_{na}/v_{voor})$, waarin v_{voor} en v_{na} de snelheden zijn van de schijf juist voor en juist na de botsing. De platen blijven op een vaste plaats. De snelheid van de schijf *juist na* de botsing met de onderste plaat gaat naar een 'stationaire waarde' v_s die afhangt van V volgens:

$$v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta}\ . \qquad (1.1)$$

- Leid de uitdrukking voor de coëfficiënten α en β af als functie van m, g, χ, d en η. Neem aan dat bij elke botsing het hele oppervlak van de schijf tegelijkertijd de plaat raakt zodat de gehele ladingsoverdracht in één keer gebeurt.

(e) [2,2 punten] Nadat de '*steady state'* bereikt is, kan de gemiddelde stroomsterkte I (gemiddeld in de tijd) beschreven worden door $I = \gamma.V^2$ als $q.V >> m.g.d$.

- Leid een uitdrukking voor de coëfficiënt γ af als functie van m, χ, d en η.

(f) [3 punten] Als de spanning V heel langzaam verminderd wordt, bestaat er een kritische waarde V_c voor V waarvoor geldt dat voor $V < V_c$ er geen lading meer wordt overgedragen.

- Leid een uitdrukking af voor V_c en leid een uitdrukking af voor de bijhorende waarde I_c , beide als functie van m, g, χ, d en η.
- Maak een schets van de $I(V)$-grafiek door V_c te vergelijken met V_{th} (zie onderdeel (c)). Laat V eerst toenemen en daarna afnemen in het interval $V = 0$ tot $V = 3V_{th}$.

Country Code	Student Code	Question Number
		1

Antwoordblad

Vraag 1:

(a) $F_p =$

(b) $\chi =$

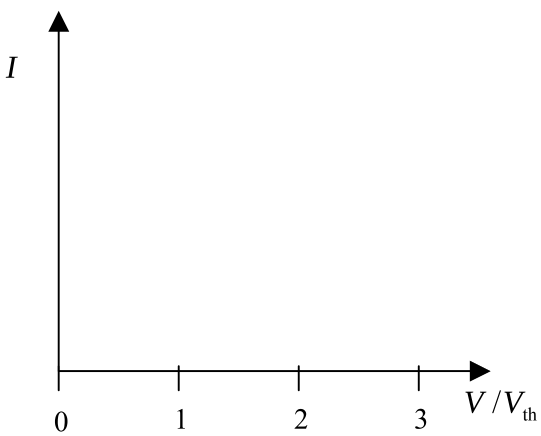
(c) $V_{th} =$

(d) $\alpha =$ $\beta =$

(e) $\gamma =$

(f) $I_c =$

$V_c =$



Succes, Ad, Hans en Jacky

Vraag 2

Een opstijgende ballon

Een rubberen ballon gevuld met heliumgas stijgt hoog op in de lucht. De druk en de temperatuur van de lucht nemen af met de hoogte. Veronderstel steeds dat de vorm van de ballon bolvormig is onafhankelijk van de belasting die aan de ballon wordt gehangen. Verwaarloos het volume van deze belasting. Je mag aannemen dat de temperatuur binnen in de ballon steeds gelijk is aan deze van de lucht er buiten en dat alle gassen zich als een ideaal gas gedragen. De gasconstante is R = 8,31 J/mol.K en de molaire massa van helium en lucht zijn respectievelijk $M_H = 4{,}00 \cdot 10^{-3}$ kg/mol en $M_l = 28{,}9 \cdot 10^{-3}$ kg/mol. De valversnelling g is gelijk aan 9,8 m/s^2.

Deel A

(a) [1,5 punten] De druk en temperatuur van de omgevende lucht zijn respectievelijk P en T. De druk binnen in de ballon is hoger dan deze buiten de ballon ten gevolge van de elastische spanning van de ballon. De ballon bevat n mol heliumgas, de druk in de ballon is $P + \Delta P$.

- Leid een uitdrukking af voor de opwaartse kracht F_B die op de ballon werkt als functie van P, ΔP en de gegeven grootheden.

(b) [2 punten] Op een mooie zomerdag in Korea is de temperatuur T van de lucht op een hoogte z boven het zeeniveau gegeven door $T(z) = T_0\,(1 - z/z_0)$ voor $0 < z < 15$ km met z_0 = 49 km en T_0 = 303 K. De druk en de dichtheid van lucht op zeeniveau zijn respectievelijk $P_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa en ρ_0 = 1,16 kg/m^3. Voor de hoogten tussen 0 en 15 km geldt voor de druk:

$$P(z) = P_0(1 - z/z_0)^{\eta} \tag{2.1}$$

- Leid een uitdrukking af voor η als functie van z_0, ρ_0, P_0 en g en geef de numerieke waarde van η met twee significante cijfers. Je mag aannemen dat de gravitatieversnelling constant blijft voor deze hoogten.

Deel B

Een bolvormige rubberen ballon heeft een straal r_0 als deze niet is uitgerekt. Als de ballon wordt opgeblazen tot een straal r ($r \geq r_0$), dan heeft hij extra elastische energie vanwege de uitrekking. In een eenvoudige theorie wordt de elastische energie bij constante temperatuur T gegeven door:

$$U = 4\pi \cdot r_0^2 \cdot \kappa \cdot R \cdot T \cdot (2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3) \qquad (2.2)$$

Hierin is $\lambda \equiv r / r_0 \geq 1$ en κ een constante met mol/m^2 als eenheid.

(c) [2 punten] Geef een uitdrukking voor ΔP als functie van de parameters die in vergelijking (2.2) voorkomen en schets het verloop van ΔP als functie van λ..

(d) [1,5 punten] De constante κ kan bepaald worden uit de hoeveelheid gas die nodig is om de ballon op te blazen. Bij T_0 = 303 K en P_0 = 1,01 · 10^5 Pa bevat een niet uitgerekte ballon ($\lambda = 1$) n_0 = 12,5 mol helium. Om de ballon op te blazen tot λ = 1,5 bij dezelfde T_0 en P_0 is n = 3,6n_0 = 45 mol helium gas nodig.

- Leid een uitdrukking af voor de parameter a ($a \equiv \kappa/\kappa_0$ en $\kappa_0 \equiv \frac{r_0 \cdot P_0}{4R \cdot T_0}$) en bereken zijn waarde met twee significante cijfers.

Deel C

Een ballon wordt op zeeniveau opgeblazen (zoals beschreven in (d)) tot λ = 1,5 met n = 3,6n_0 = 45 mol helium gas bij T_0 = 303 K en P_0 = 1,01 · 10^5 Pa. De totale massa inclusief de massa van het gas, de massa van de ballon en de massa van de belasting is M_T = 1,12 kg. De ballon wordt vanaf zeeniveau opgelaten.

(e) [3 punten] Veronderstel dat de ballon blijft hangen op een hoogte z_f waar de opwaartse kracht en het totale gewicht aan elkaar gelijk zijn.

- Bereken de waarde van z_f en van λ op deze hoogte met twee significante cijfers. Veronderstel dat de ballon niet wegdrijft en dat er geen heliumgas ontsnapt.

Country Code	Student Code	Question Number
		2

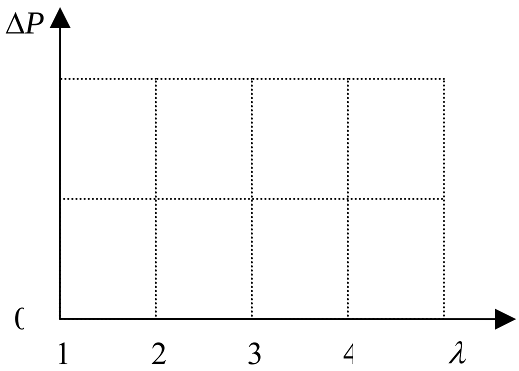
Antwoordblad

Vraag 2:

(a) F_B =

(b) $\eta =$ Numerieke waarde van $\eta =$

(c) $\Delta P =$



(d) a = Numerieke waarde van $a =$

(e) z_f = km λ_f =

Succes, Ad, Hans en Jacky

Vraag 3.

“Scanning Probe Microscope”

Scanning probe microscopen (SPM) zijn krachtige instrumenten voor onderzoek in nano-science. In een SPM bevindt zich een buigzaam staafje dat aan de ene kant vrij is en aan de andere kant is vastgemaakt aan een piezo-elektrisch element. De beweging van het vrije uiteinde van het staafje kan worden gemeten met een laserstraal, die, na door het staafje te zijn teruggekaatst, op een fotodetector valt. Het staafje kan alleen maar in een verticaal vlak bewegen. De verplaatsing z van het vrije uiteinde kan als functie van de tijd t beschreven worden met de vergelijking

$$m\frac{d^2z}{dt^2}+b\frac{dz}{dt}+kz=F \tag{3.1}$$

met m de massa van het staafje, $k=m\omega_0^2$ de veerconstante van het staafje, b een kleine dempingsfactor waarvoor geldt $\omega_0 >> (b/m) > 0$, en F de externe kracht die door het piezo-elektrisch element wordt uitgeoefend op het staafje.

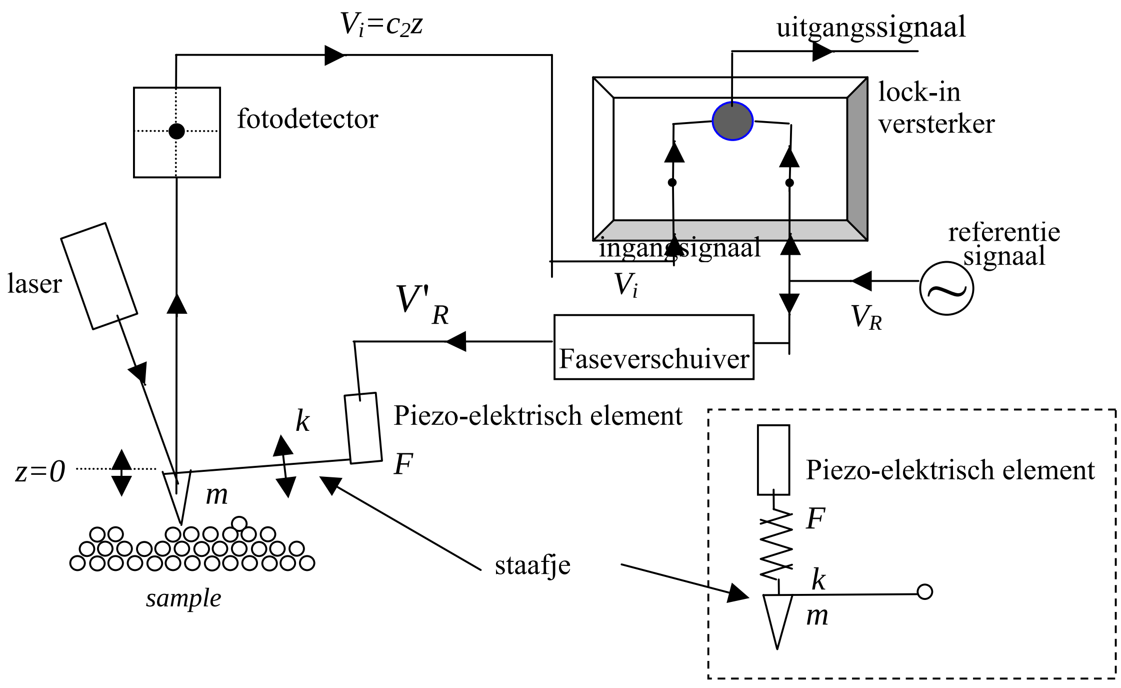


Figure 3.1 Een schematische tekening van een SPM. De inzet rechtsonder toont een vereenvoudigd mechanisch model dat de koppeling tussen het piezo-elektrisch element en het staafje geeft.

Deel A

(a) [1.5 punt] Stel $F = F_0 \sin \omega t$, dan voldoet de functie $z(t)$ aan vergelijking (3.1) als geldt dat: $z(t) = A\sin(\omega t - \phi)$, met $A > 0$ en $0 \le \phi \le \pi$.

- Leid een uitdrukking af voor de amplitude A en voor $\tan\phi$ uitgedrukt in F_0, m, ω, ω_0, en b.
- Bepaal A en de fase ϕ bij de resonantiefrequentie $\omega = \omega_0$.

(b) [1 punt] Een lock-in versterker (zie Fig.3.1) vermenigvuldigt een ingangssignaal met een referentiesignaal, $V_R = V_{R0} \sin \omega t$, en laat daarna alleen de gelijkspanningscomponent door van het vermenigvuldigde signaal. Neem aan dat het ingangssignaal gegeven wordt door $V_i = V_{i0} \sin(\omega_i t - \phi_i)$. Hierin zijn V_{R0}, V_{i0}, ω_i, en ϕ_i positieve, gegeven constanten.

- Leid de voorwaarde af voor ω (>0) waarvoor het uitgangssignaal verschillend is van nul.
- Wat is de uitdrukking voor de grootte van het uitgangssignaal bij deze frequentie?

(c) [1.5 punt] Als het referentiesignaal $V_R = V_{R0} \sin \omega t$ de faseverschuiver passeert, verandert dit in $V'_R = V_{R0} \sin(\omega t + \pi/2)$. Aangesloten op het piezo-elektrisch element, drijft V'_R het staafje aan met een kracht $F = c_1 V'_R$. De fotodetector zet de verplaatsing z van het staafje om in een spanning $V_i = c_2 z$. Hierin zijn c_1 and c_2 constanten.

- Leid een uitdrukking af voor de grootte van de gelijkspanningscomponent van het uitgangssignaal bij $\omega = \omega_0$.

(d) [2 punten] Stel dat we de massa van het staafje een beetje vergroten met Δm. Daardoor verschuift de resonantiefrequentie met $\Delta\omega_0$. Hierdoor verandert de fase ϕ bij de oorsponkelijke resonantiefrequentie ω_0 met $\Delta\phi$.

- Leid de grootte van de massaverandering Δm af, als gevolg van een faseverschuiving $\Delta\phi = \pi/1800$. Deze faseverschuiving is kenmerkend voor de nauwkeurigheid in fasebepalingen.

Voor het staafje is gegeven dat: $m = 1.0 \cdot 10^{-12}$ kg, $k = 1.0$ N/m, en $(b/m) = 1.0 \cdot 10^{3}$ s^{-1}.
Gebruik de benaderingen $(1+x)^a \approx 1 + ax$ en $\tan(\pi/2 + x) \approx -1/x$ als $|x| << 1$.

Deel B

In het vervolg beschouwen we, afgezien van de externe aandrijvende kracht beschreven in deel A, de situatie waarbij onder invloed van het sample ook andere krachten op het staafje werken (zie fig.3.1).

(e) [1.5 punt] Als we aannemen dat er een extra kracht $f(h)$ werkt, die alleen maar van de afstand h tussen het staafje en het sample-oppervlak afhangt, ontstaat een nieuw evenwicht bij de afstand h_0. Voor afstanden h die ongeveer gelijk zijn aan h_0, kunnen we schrijven $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0)$, waarin c_3 een constante is.

- Bereken de nieuwe resonantiefrequentie ω'_0 uitgedrukt in ω_0, m, en c_3.

(f) [2.5 punt] Tijdens het scannen van het oppervlak, waarbij het sample horizontaal bewogen wordt, neemt het uiteinde van het staafje, dat zelf een lading $Q = 6e$ heeft, een elektron met lading $q = e$ waar, dat gevangen zit op een plaats op enige afstand onder het oppervlak.

De verschuiving van de resonantiefrequentie $\Delta\omega_0 (= \omega'_0 - \omega_0)$ in de buurt van het elektron, blijkt een maximum te hebben. De waarde van het maximum is echter veel kleiner dan ω_0.

- Leid een uitdrukking af voor de afstand d_0 van het staafje tot het elektron bij de maximumverschuiving uitgedrukt in m, q, Q, ω_0, $\Delta\omega_0$, en de constante van Coulomb k_e voor elektrostatische krachten.
- Bereken een numerieke waarde voor d_0 in nm (1 nm = 1×10^{-9} m) als $\Delta\omega_0 = 20$ s^{-1}.

Voor het staafje is gegeven dat: $m = 1.0 \cdot 10^{-12}$ kg en $k = 1.0$ N/m.

Verwaarloos influentieverschijnselen zowel voor het staafje als voor het sample-oppervlak.

Bedenk dat $k_e = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9.0 \cdot 10^9$ N·m^2/C^2 en $e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C.

Country Code	Student Code	Question Number
		3

Antwoordblad

Vraag 3:

(a) $A =$ en $\tan\phi =$

Bij $\omega = \omega_0$, $A =$ en $\phi =$

(b) De voorwaarde voor ω waarvoor het uitgangssignaal verschillend van nul is:

De grootte van de gelijkspanningscomponent van het uitgangssignaal =

(c) De grootte van de gelijkspanningscomponent van het uitgangssignaal =

(d) $\Delta m =$ kg

Succes, Ad, Hans en Jacky

Country Code	Student Code	Question Number
		3

(e) $\omega'_0 =$

(f) $d_0 =$

numerieke waarde van $d_0 =$ nm.