De 36^{e} Internationale Natuurkunde Olympiade Salamanca, -Spanje

Theorie-toets

dinsdag 5 juli 2005

duur: 5 uur

Lees dit eerst!

1. Voor de theoretische toets is 5 uur beschikbaar.

2. Beschrijf uitsluitend de voorkant van het papier.

3. Maak elke opgave op een nieuw blad.

4. Behalve de ***blanco bladen*** waar je op mag schrijven, is er een ***antwoordblad*** waarop de antwoorden *moeten* worden samengevat. Geef numerieke resultaten weer met een verantwoord aantal significante cijfers.

5. Op de blanco bladen mag je uiteraard alles schrijven waarvan je denkt dat het belangrijk is voor het oplossen van het vraagstuk. Gebruik echter zoveel mogelijk vergelijkingen, numerieke waarden, tekeningen en grafieken. Gebruik dus zo weinig mogelijk tekst.

6. Bovenaan elk blad moet je het **land (Country Code)** en je **studentnummer (Student Code)** invullen. Vul verder in: het nummer van de opgave (**Question Number**); het paginanummer (**Page Number)** en het totaal aantal blanco bladen (**Total Number of Pages**) dat je hebt gebruikt en dat nagekeken moet worden. Noteer ook aan het begin van elk blad het nummer en het onderdeel van de vraag waarmee je bezig bent. Zet een kruis door alle andere beschreven bladen die niet nagekeken hoeven te worden. Neem deze bladen ook niet op in de nummering van de bladen.
7. Leg aan het eind alle bladen in de *juiste volgorde*:
   - per vraagstuk eerst het *antwoordblad*,
   - daarna de *beschreven bladen* die nagekeken moeten worden en
   - dan de bladen die niet nagekeken hoeven te worden.
   - Ongebruikte bladen en de opgaven

   Stop de bladen in de daarvoor bestemde enveloppe. Laat alles op je tafel achter. Je mag *geen* enkel blad meenemen.

Th 1 EEN SATELLIET MET NOODLOTTIGE AFLOOP

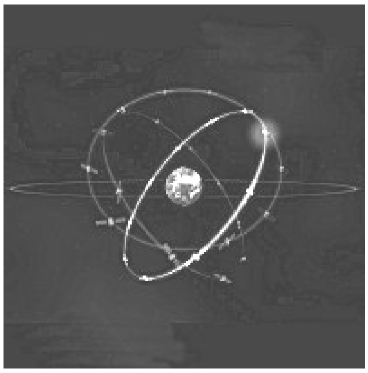


foto: ESA

De meeste baancorrecties bij ruimtevaartuigen bestaan uit aanpassingen van de snelheid in de richting van de baan, zoals versnellingen om hogere banen te bereiken of vertragingen om te beginnen met een terugkeer in de atmosfeer. In dit vraagstuk bestuderen we echter de baanvariaties als de motorkracht in radiële richting wordt uitgeoefend.

- De volgende getalwaarden zijn gegeven:
- Straal van de aarde $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m}$,
- Versnelling tgv de zwaartekracht op het aardoppervlak: $g = 9{,}81 \text{m/s}^2$,
- De lengte van een siderische dag is: $T_0 = 24{,}0 \text{ h}$.

We beschouwen een geostationaire[1] satelliet met massa m die een cirkelvormige baan met straal r_0 uitvoert, gelegen in het equatoriale vlak.

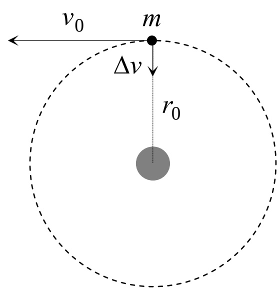
Vraag 1

1.1 (0.3 pt) Bereken de numerieke waarde van r_0.

1.2 (0.3+0.1 pt) Druk de snelheid v_0 van de satelliet uit als een functie van g, R_T, en r_0 en bereken z'n numerieke waarde.

1.3 (0.4+0.4 pt) Leid uitdrukkingen voor het impulsmoment L_0 en de totale mechanische energie E_0 als functie van v_0, m, g en R_T.

Als de satelliet eenmaal in zijn geostationaire cirkelvormige baan beweegt, wordt vanaf het controlecentrum op aarde een fout gemaakt door de motor nogmaals te ontsteken. Daardoor treedt een impulsverandering in de richting van de aarde op als gevolg waarvan de satelliet een ongewenste snelheidsverandering Δv krijgt (zie figuur F-1). Deze stoot wordt gekarakteriseerd door de parameter $\beta = \Delta v / v_0$. De tijdsduur dat de motor werkt, is verwaarloosbaar klein ten opzichte van de omlooptijd van de satelliet, waardoor we deze verandering als instantaan kunnen beschouwen.



F-1

Vraag 2

Veronderstel $\beta < 1$.

2.1 (0.4+0.5 pt) Druk de parameters van de nieuwe baan[2], het *semi-latus-rectum l* (halve korte as van de ellipsbaan) en de excentriciteit ε uit als functie van r_0 en β.

2.2 (1.0 pt) Bereken de hoek α tussen de lange as van de nieuwe baan en de plaatsvector van z'n positie toen de motor per ongeluk ontstoken werd.

2.3 (1.0+0.2 pt) Leid de formule af voor de kortste afstand r_{min} en de langste afstand r_{max} tot het middelpunt van de aarde als functie van r_0 en β en bepaal hun numerieke waarden voor $\beta = 1/4$.

2.4 (0.5+0.2 pt) Bepaal de omlooptijd T van de nieuwe baan als een functie van T_0 en β en bereken de numerieke waarde van T voor $\beta = 1/4$.

---

[1] Zijn omlooptijd is T_0.

[2] Zie de "hint".

Vraag 3

3.1 (0.5 pt) Bereken de kleinste waarde van de parameter β_{esc} die nodig is om de satelliet uit het zwaartekrachtsveld van de aarde te laten ontsnappen..

3.2 (1.0 pt) Bepaal in dit geval bij de nieuwe baan de kleinste afstand van de satelliet tot het centrum van de aarde, r'_{min} als functie van r_0 .

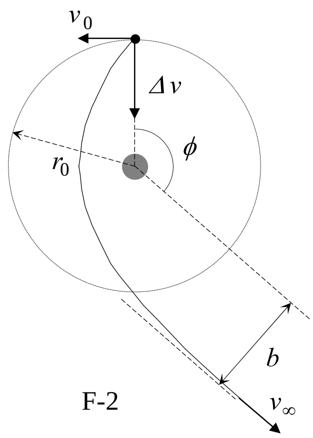
Vraag 4

Veronderstel $\beta > \beta_{esc}$.

4.1 (1.0 pt) Leid de eindsnelheid in het oneindige v_∞ af als functie van v_0 en β.

4.2 (1.0 pt) Leid een uitdrukking af voor de “botsingsparameter” b (wordt bepaald door de richting van v_∞) als functie van r_0 en β. (Zie Figuur F-2).

4.3 (1.0+0.2 pt) Leid de hoek ϕ af als functie van β. Bereken de numerieke waarde van ϕ voor het geval dat $\beta = \frac{3}{2}\beta_{esc}$.

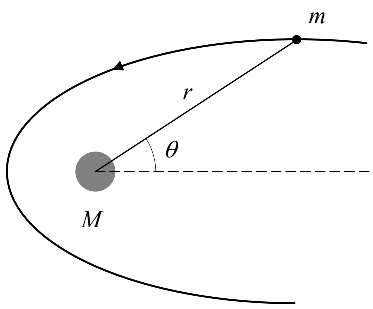


F-2

HINT

Onder invloed van centrale krachten die omgekeerd evenredig zijn met het kwadraat van de afstand r volgen de massa’s banen die ellipsen, parabolen of hyperbolen kunnen zijn. Als geldt dat $m << M$ dan valt de massa M samen met één van de brandpunten. Als we de oorsprong in dit brandpunt nemen, dan kan de algemene vergelijking voor deze banen in poolcoördinaten geschreven worden als (zie Figuur F-3)

$$r(\theta) = \frac{l}{1-\varepsilon\ cos\,\theta}$$



F-3

waarbij l een positieve constante is, die de *semi-latus-rectum* (de halve korte as) genoemd wordt en ε de excentriciteit is van de baan. Uitgedrukt in de behouden grootheden geldt:

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \qquad \text{en} \qquad \varepsilon = \left(1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}\right)^{1/2}$$

Waarbij G de gravitatieconstante is, L het impulsmoment van de massa in de baan ten opzichte van de oorsprong is en E de totale mechanische energie is, waarbij de potentiële energie nul is in het oneindige.

We hebben de volgende mogelijkheden:

i) Als $0 \le \varepsilon < 1$, dan is de baan een ellips (een cirkel voor $\varepsilon = 0$).

ii) Als $\varepsilon = 1$, dan is de baan een parabool.

iii) Als $\varepsilon > 1$, dan is de baan een hyperbool.

COUNTRY CODE	STUDENT CODE	PAGE NUMBER	TOTAL No OF PAGES

Th 1 ANTWOORDBLAD

Vraag	Basisformules en uitgangspunten	Formules	Numerieke resultaten	Punten-verdeling
1.1			$r_0 =$	0.3
1.2		$v_0 =$	$v_0 =$	0.4
1.3		$L_0 =$ $E_0 =$		0.4 0.4
2.1		$l =$ $\varepsilon =$		0.4 0.5
2.2			$\alpha =$	1.0
2.3		$r_{max} =$ $r_{min} =$	$r_{max} =$ $r_{min} =$	1.2
2.4		$T =$	$T =$	0.7
3.1			$\beta_{esc} =$	0.5
3.2		$r'_{min} =$		1.0
4.1		$v_\infty =$		1.0
4.2		$b =$		1.0
4.3		$\phi =$	$\phi =$	1.2

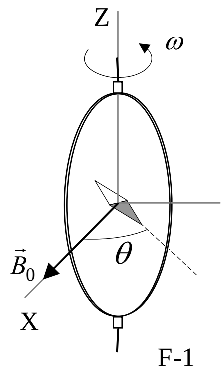
Th 2 BEPALING VAN ABSOLUTE EENHEDEN VAN ELEKTRISCHE GROOTHEDEN

Door de technologische en wetenschappelijke ontwikkelingen tijdens de negentiende eeuw was het heel belangrijk om universeel aanvaarde standaardwaarden voor elektrische grootheden te bezitten. Men dacht dat nieuwe absolute eenheden enkel gebaseerd moesten zijn op de standaardwaarden van lengte, massa en tijd, zoals die werden vastgelegd na de Franse Revolutie. Een groot gedeelte van het experimenteel werk werd verricht van 1861 tot 1912.

Bepaling van de standaardwaarde van de ohm volgens Kelvin

Een gesloten cirkelvormige spoel met N windingen, straal a en totale weerstand R, wordt geroteerd rond een verticale as met een constante hoeksnelheid ω in een horizontaal magnetisch veld $\vec{B}_0 = B_0\,\vec{i}$

1. (0.5+1.0 pt) Bereken de inductiespanning ε in de spoel en het gemiddeld vermogen[1] $\langle P \rangle$ nodig om de spoel in beweging te houden. Verwaarloos de zelfinductie van de spoel.



F-1

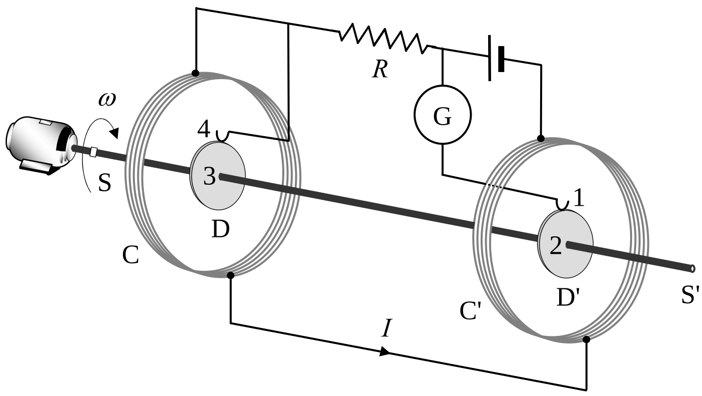
Een kleine magneetnaald wordt geplaatst in het centrum van de spoel (zie figuur F-1). De naald kan langzaam draaien rond de z-as in een horizontal vlak maar kan de snelle rotatie van de spoel niet volgen.

2. (2.0 pt) In een stationaire toestand zal de magneetnaald in een richting staan die een kleine hoek θ met $\vec{B}_0$ maakt. Bereken de weerstand R van de spoel als functie van θ en de andere parameters van het systeem.

Lord Kelvin gebruikte deze methode rond 1860 om de eenheidswaarde van de ohm te bepalen. Om de rotatie van de spoel te vermijden heeft Lorenz een alternatieve methode aangeraden welke verder ontwikkeld werd door Lord Rayleigh en Ms. Sidgwick. In het volgende deel zal deze methode aan bod komen.

Bepaling van de standaardwaarde van de ohm volgens Rayleigh en Sidgwick

De experimentele opstelling wordt getoond in figuur F-2. Deze opstelling bestaat uit twee identieke metalen schijven D en D' met straal b, bevestigd op een geleidende as SS'. Een motor doet het geheel draaien met een constante hoeksnelheid ω, die kan worden aangepast om de waarde van R te bepalen. Twee identieke spoelen C en C' (met straal a en elk met N windingen), bevinden zich rond de schijven. De spoelen zijn zo geschakeld dat de richting van de



F-2

[1] De gemiddelde waarde $\langle X \rangle$ van de grootheid $X(t)$ in een periodiek systeem met periode T is $\langle X \rangle = \dfrac{1}{T}\int_0^T X(t)\,dt$

Je kunt een of meer van de volgende integralen nodig hebben:

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \int_0^{2\pi} \cos x\,dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x\,dx = 0\,, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx = \pi\,, \quad \text{en} \quad \int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

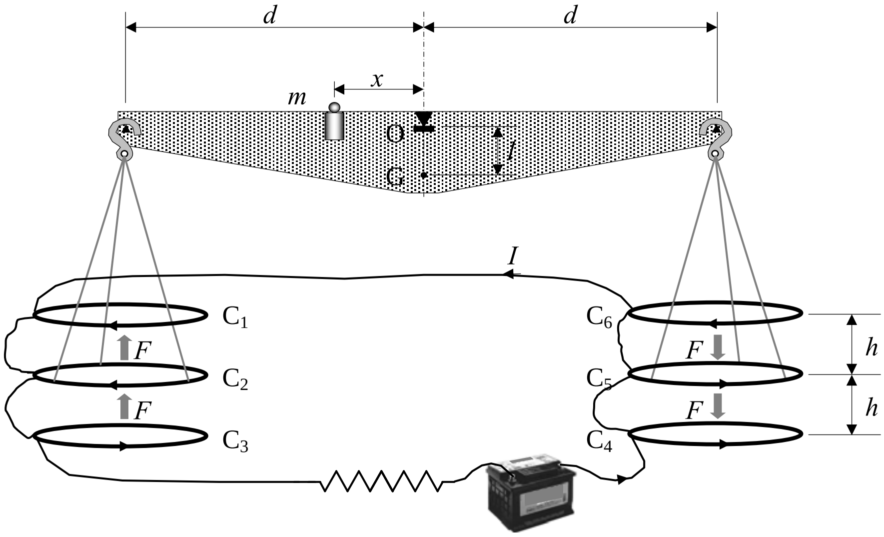
stroom door de spoelen tegengesteld is. Het apparaat werd gebruikt om de waarde van de weerstand R te bepalen.

3. (2.0 pt) Stel dat de stroomsterkte I door de spoelen C en C' een homogeen magnetisch veld B opwekt rond D en D' met een waarde die gelijk is aan de waarde van het veld in het centrum van de spoel. Bereken de inductiespanning tussen de punten 1 en 4 op de randen van de schijven. ($a \ll b$ en verwaarloos de wederzijdse invloed van de spoelen). De schijven zijn verbonden door sleepcontacten met de schakeling in de punten 1 en 4. De galvanometer G meet de stroomsterkte in de schakeling 1-2-3-4.

4. (0.5 pt) De weerstand R wordt bepaald wanneer de galvanometer G nul aanwijst. Stel een formule op voor R als functie van de parameters van het systeem.

Bepaling van de standaardwaarde van de ampère.

Als we een stroom door twee geleiders laten gaan en we meten de kracht tussen de geleiders kunnen we de absolute standaardwaarde van de ampère bepalen. De "stroombalans" werd ontwikkeld door Lord Kelvin in 1882. De opstelling bestaat uit zes identieke spoelen C_1, ...,C_6 (met één winding en straal a) in serie geschakeld. De figuur F-3 toont de vaste spoelen C_1, C_3, C_4 en C_6 die zich bevinden in twee horizontale vlakken op een afstand 2 h van elkaar. De spoelen C_2 en C_5 zijn bevestigd aan een balans met armen met lengte d. Deze spoelen zijn in de evenwichtspositie op eenzelfde afstand van beide horizontale vlakken.
De stroomsterkte I gaat op zo'n manier door de verschillende spoelen dat de magnetische kracht op C_2 opwaarts is en op C_5 neerwaarts is. Als er een stroom door de schakeling stroomt er is een voorwerp met massa m (op een afstand x van het draaipunt O) vereist om de balans in de evenwichtspositie zoals eerder beschreven te houden.



F-3

5. (1.0 pt) Bereken de kracht F op C_2 ten gevolge van de magnetische wisselwerking met C_1. Voor de eenvoud veronderstellen we dat de kracht per lengte-eenheid gelijk is aan de kracht tussen twee lange rechte stroomvoerende draden.

6. (1.0 pt) De stroomsterkte I wordt bepaald met de balans in evenwicht. Stel een formule op voor I als van functie van de fysische parameters van het systeem. De afmetingen van het apparaat zijn zodanig dat de wederzijdse effecten tussen de spoelen aan de linkerkant en de spoelen aan de rechterkant kunnen worden verwaarloosd.

Stel dat de massa van de balans (zonder de massa m en de opgehangen delen) gelijk is aan M. G is het zwaartepunt en l is de afstand tussen O en G.

7. (2.0 pt) De balans blijft in stabiel evenwicht bij kleine veranderingen δz in de hoogte van C_2 en - δz van C_5. Bereken[2] de maximumwaarde van δz_{max} waarvoor de balans terugkeert naar de evenwichtspositie als ze losgelaten wordt.

[2] Veronderstel dat de centra van de spoelen bij benadering op één lijn blijven.

Gebruik de volgende benaderingen: $\frac{1}{1\pm\beta} \approx 1 \mp \beta + \beta^2$ of $\frac{1}{1\pm\beta^2} \approx 1 \mp \beta^2$ voor $\beta << 1$, en $\sin\theta \approx \tan\theta$ voor kleine θ.

COUNTRY CODE	STUDENT CODE	PAGE NUMBER	TOTAL No OF PAGES

TH2 ANTWOORDBLAD

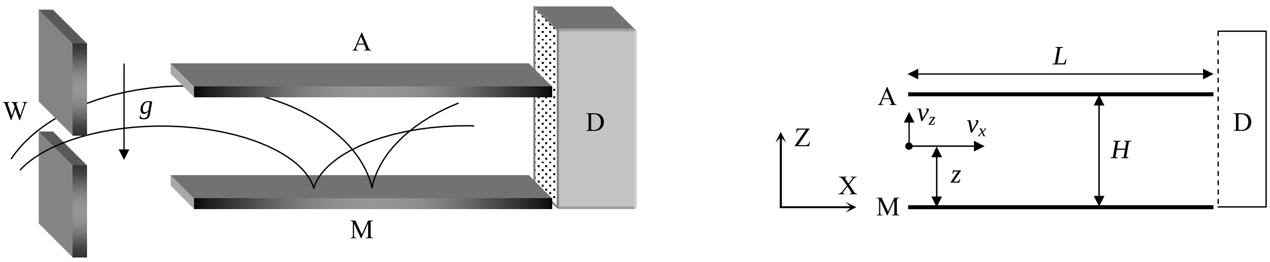
Vraag	Basisformules en uitgangspunten	Formules	Punten-verdeling
1		$\varepsilon =$ $\langle P \rangle =$	1.5
2		$R =$	2.0
3		$\varepsilon =$	2.0
4		$R =$	0,5
5		$F =$	1.0
6		$I =$	1.0
7		$\delta z_{\max} =$	2.0

Th 3 NEUTRONEN IN VELD VAN DE ZWAARTEKRACHT

In de bekende klassieke wereld is een volkomen elastisch stuiterende bal op het aardoppervlak een mooi voorbeeld van een eeuwig durende beweging. De bal blijft bewegen tussen twee uitersten: hij komt niet beneden het aardoppervlak noch boven het keerpunt. Alleen luchtwrijving of onelastische botsingen kunnen de beweging stoppen, maar dat laten we verder buiten beschouwing.

Een groep fysici van het Laue-Langevin instituut in Grenoble hebben in 2002 een rapport geschreven over het gedrag van neutronen in het zwaartekrachtsveld van de aarde. In het experiment bewegen neutronen naar rechts terwijl ze onder de invloed van de zwaartekracht naar beneden vallen op een horizonaal kristallijn oppervlak dat als spiegel voor neutronen werkt. Daarna stuiteren ze elastisch op naar de oorspronkelijke hoogte. Dit stuiteren herhaalt zich vele malen.

De opstelling is in figuur F-1 schematisch weergegeven. Het bestaat uit de opening C, de neutronenspiegel M (op hoogte $z = 0$), de neutronenabsorber A (op hoogte $z = H$ en lengte L) en de neutronendetector D. De neutronenbundel vliegt met een constante horizontale snelheidscomponent v_x van C naar D door de ruimte tussen A en M. Alle neutronen die het vlak A raken worden geabsorbeerd en verdwijnen uit het experiment. Degenen die het oppervlak M raken worden elastisch teruggekaatst. De detector D telt de transmissie $N(H)$; dit is het aantal neutronen dat D per tijdseenheid bereikt.



F-1

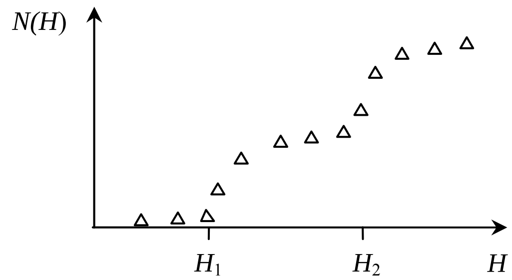
De neutronen komen de ruimte tussen A en M (met lengte L) binnen met een verticale snelheidscomponent v_z die verschillende positieve en negatieve waarden kan hebben.

1. (1,5 pt) Bereken met de klassieke mechanica de waarden die de verticale snelheid $v_z(z)$ van de neutronen, die binnengekomen op een hoogte z de detector D bereiken. Neem aan dat L veel groter is dan elke andere afmeting van het systeem.

2. (1,5 pt) Bereken met de klassieke mechanica de minimale lengte L_c van de ruimte tussen A en M zodat neutronen met een verticale snelheidscomponent die buiten het snelheidsinterval gevonden in 1 vallen, ongeacht de waarde van z, worden geabsorbeerd door A. Neem v_x=10 m·s^{-1} en H= 50 μm.

De transmissie van de neutronen $N(H)$ wordt gemeten bij D. We verwachten dat dit monotoon (gelijkmatig) toeneemt met H.

3. (2,5 pt) Bereken de klassieke transmissie $N_c(H)$, ervan uitgaande dat de neutronen de ruimte tusen A en M binnenkomen op hoogte z met verticale snelheid v_z, waarbij alle waarden van v_z en z even waarschijnlijk zijn. Geef het antwoord als functie van ρ, dat is het constante aantal neutronen dat per tijdseenheid, per eenheid van verticale snelheid en per eenheid van hoogte de ruimte tussen A en M binnenkomen met verticale snelheid v_z en op hoogte z.



F-2

De experimentele resultaten die de Grenoble groep kregen, kloppen niet met de klassieke voorspellingen hierboven, in plaats daarvan laten ze zien dat de waarde van $N(H)$ sterk toeneemt als bepaalde kritische hoogten H_1, H_2, … worden overschreden. (figuur F-2 toont een schets). Anders gezegd, het experiment toont aan dat de verticale beweging van de op de spiegel kaatsende neutronen gequantiseerd is. In de woorden die Bohr en Sommerfeld gebruikten om tot de energieniveaus van het waterstofatoom te komen kun je dit schrijven als:

"De actie S van de neutronen in verticale richting is een geheel aantal keren de constante van Planck h". S wordt daarbij gegeven door:

$$S = \int p_z(z)\, dz = n h, \quad n = 1, 2, 3 \ldots \qquad \text{(Bohr-Sommerfeld quantisatievoorwaarde)}$$

waarbij p_z de verticale component is van de klassieke impuls (bewegingshoeveelheid) en waarbij de integraal een gehele botsingscyclus omvat. Alleen neutronen met deze waarden van S worden in de ruimte tussen A en M toegelaten.

4. (2,5 pt) Bereken de kritische hoogten H_n en de energieniveaus E_n (horend bij de verticale beweging) met toepassing van de Bohr-Sommerfeld quantisatievoorwaarde. Geef het numerieke resultaat van H_1 in µm en van E_1 in eV.

Tijdens de vlucht door de lange ruimte tussen A en M verandert de oorspronkelijke uniforme verdeling ρ van de neutronen bij het binnenkomst in een stapsgewijze verdeling die bij D wordt gedetecteerd (zie figuur F-2). Voor de eenvoud gaan we in het vervolg uit van een lange ruimte tussen A en M met $H < H_2$. Klassiek gesproken zijn alle neutronen met een energie uit het interval zoals in vraag 1 gevonden toegestaan. Quantummechanisch zijn alleen neutronen met energieniveau E_1 toegestaan. In overeenstemming met de tijd-energie onzekerheidsrelatie van Heisenberg, is voor dit herverdelen een minimale vluchttijd nodig. Sterker nog, de onzekerheid van de verticale bewegingsenergie zal vrij groot zijn als de hoogte van de ruimte tussen A en M klein is. Dit fenomeen geeft aanleiding tot een verbreding van de energieniveaus.

5. (2,0 pt) Maak een schatting van de minimale vluchtduur t_q en de minimale lengte L_q van de ruimte tussen A en M die nodig is om de eerste scherpe verhoging van het aantal neutronen in D te zien. Neem v_x= 10 m·s^{-1}.

Gegevens:

Constante van Planck	$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J s
Lichtsnelheid in vacuum	$c = 3{,}00 \cdot 10^{8}$ m s^{-1}
Elementaire lading	$e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C
Massa van een neutron	$M = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg
Valversnelling op aarde	$g = 9{,}81$ ms^{-2}

Indien nodig, gebruik de uitdrukking: $\int (1-x)^{1/2} dx = -\dfrac{2(1-x)^{3/2}}{3}$

COUNTRY CODE	STUDENT CODE	PAGE NUMBER	TOTAL No OF PAGES

Th 3 ANTWOORDBLAD

Vraag	Basisformules en uitgangspunten	Formules	Numerieke resultaten	Punten-verdeling
1		$\leq v_z(z) \leq$		1.5
2		$L_c =$	$L_c =$	1.5
3		$N_c(H)=$		2.5
4		$H_n =$ $E_n =$	$H_1=$ μm $E_1 =$ eV	2.5
5		$t_q =$ $L_q =$	$t_q =$ $L_q =$	2.0