

## **IPhO2009**

Theoretische toets  
*Maandag, 13 juli, 2009*

### **Lees dit eerst:**

1. Voor de theorie toets is 5 uur beschikbaar.
2. Gebruik uitsluitend de door de organisatie ter beschikking gestelde pen.
3. Gebruik alleen de voorkant van de vellen papier.
4. Gebruik voor je berekeningen alleen de ter beschikking gestelde rekenmachine.
5. Let op dat elk vraagstuk zijn eigen kleur heeft. Vraagstuk 1 is rood, vraagstuk 2 is blauw en vraagstuk 3 is geel.
6. Elk vraagstuk staat op een vragenformulier, met een Q in de linkerbovenhoek.
7. Je *moet* de antwoorden die je hebt gevonden samenvatten op het antwoordblad, gemarkeerd met een A in de links boven..
8. Verder is er een set extra werkbladen, gemarkeerd met een W links boven, waarop je je berekeningen kunt schrijven. Numerieke antwoorden moeten geschreven worden met zoveel significante cijfers als gevraagd wordt.
9. Schrijf op de werkbladen alles waarvan je denkt dat nodig is voor de oplossing van het vraagstuk. wat je nodig acht. Gebruik zo weinig mogelijk tekst als mogelijk is en gebruik vooral vergelijkingen, figuren, getallen en grafieken
10. Voor elk probleem en elk van de bladen (vraagblad, antwoordblad en werkblad) vul je bovenaan elk blad dat je gebruikt je studentnummer, het paginanummer en het totaal aantal gebruikte pagina's in. Zet een kruis door alle andere beschreven bladen die niet nagekeken hoeven te worden. Neem deze bladen ook niet op in de nummering van de bladen..
11. Leg aan het einde alle bladen in de juiste volgorde in de mappen.
  - Per kleur eerst de antwoordebladen
  - Daarna de beschreven bladen die nagekeken moeten worden in de goede volgorde.
  - Dan de bladen die niet nagekeken hoeven te worden. (gemarkt met een groot kruis).
  - Ongebruikte werkbladen
  - En de opgavenbladen.

Stop alle papieren met dezelfde kleur in de map met dezelfde kleur, en laat alles op je tafel achter. Je mag geen enkel blad meenemen, ook de rekenmachine niet.

## THEORETISCH VRAAGSTUK No. 1

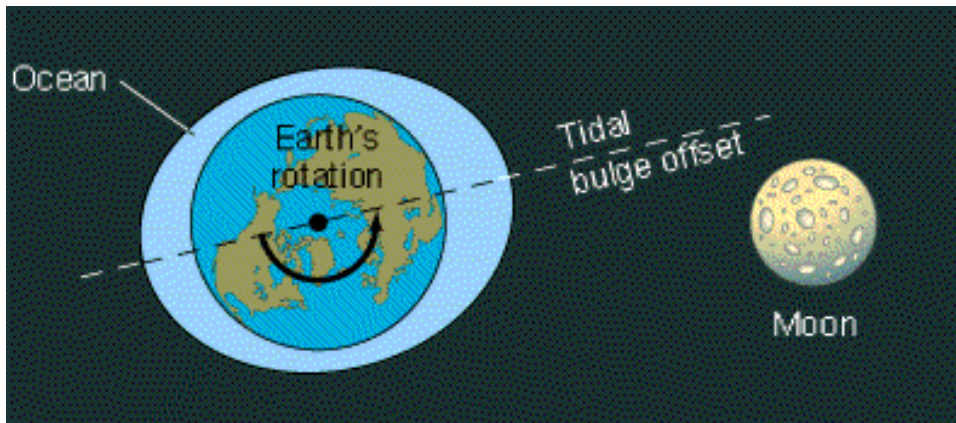
### EVOLUTIE VAN HET AARDE -MAAN SYSTEEM

Wetenschappers kunnen de afstand tussen de aarde en de maan met grote precisie (heel nauwkeurig) bepalen. Ze bereiken dit door een laserbundel te laten weerkaatsen op speciale spiegels die door astronauten in 1969 op het oppervlakte van de maan geplaatst en de reistijd van het laserlicht te meten (zie figuur 1).



Figuur 1. Een laserstraal uitgezonden vanuit een observatiestation wordt gebruikt om de afstand Aarde – Maan nauwkeurig te meten.

Met deze observaties/waarnemingen hebben ze rechtstreeks gemeten dat de Maan zich langzaam van de Aarde verwijdert. Met andere woorden de afstand tussen de Aarde – Maan neemt toe met de tijd. Dit gebeurt omdat ten gevolge van de getijdemomenten de Aarde impulsmoment overdraagt aan de Maan, (zie fig 2). In dit vraagstuk moet je de basis parameters van dit fenomeen/gebeuren afleiden.



Figuur 2. De gravitatie van de Maan veroorzaakt getijdevervormingen of “uitstulpingen” in de Aarde. Door de rotatie van de Aarde valt de lijn die door de uitstulpingen gaat niet samen met de verbindingslijn Aarde- Maan. Dit niet samenvallen van de twee lijnen veroorzaakt een moment dat impulsmoment van de rotatie van de Aarde overdraagt aan de beweging van de Maan. De figuur is niet op schaal.

### 1. Behoud van Impulsmoment.

Neem aan dat het huidige totaal impulsmoment van het Aarde – Maan systeem  $L_1$  is. Maak nu de volgende aannames: i)  $L_1$  is de som van de rotatie van de Aarde om haar as en de beweging van de Maan in haar baan om de Aarde. ii) De baan van de Maan is cirkelvormig en de Maan mag beschouwd worden als een punt. iii) De rotatie van de Aarde en de beweging van de Maan liggen in het zelfde vlak. iv) Om de berekeningen te vereenvoudigen, gaan we er vanuit dat beweging plaats vindt om het middelpunt van de Aarde niet om het massamiddelpunt. In het gehele vraagstuk, worden alle traagheidsmomenten, momenten en impulsmomenten gedefinieerd ten opzichte van de aardas. v) Verwaarloos de invloed van de zon.

1a	Geef de vergelijking voor het huidige totaal impulsmoment van het Aarde – Maan systeem. Geef deze vergelijking uitgedrukt in $I_E$ , het traagheidsmoment van de Aarde; $\omega_{E1}$ , de actuele hoekfrequentie van de Aarde om haar as; $I_{M1}$ , het actuele traagheidsmoment van de Maan ten opzichte van het middelpunt van de Aarde; en $\omega_{M1}$ , de actuele hoekfrequentie van de Maan in haar baan om de Aarde.	0.2
----	---	-----

Dit proces van overdracht van impulsmoment zal ophouden wanneer de periode van de rotatie van de Aarde om haar as en de periode van circuleren van de Maan om de Aarde gelijk zijn. Dan zullen de getijde uitstulpingen, veroorzaakt door de Maan op Aarde, op de verbindingslijn Aarde – Maan liggen, en het moment zal verdwijnen.

1b	Geef de vergelijking voor het uiteindelijk totaal impulsmoment $L_2$ van het Aarde – Maan systeem. Doe de zelfde aannamen als in vraag 1a. Druk de vergelijking uit in $I_E$ , het traagheidsmoment van de Aarde; $\omega_2$ , de uiteindelijk hoekfrequentie van de rotatie van de Aarde en de beweging van de Maan; en $I_{M2}$ , het uiteindelijke traagheidsmoment van de Maan.	0.2
----	---	-----

1c	Verwaarloos de bijdrage van de rotatie van de Aarde aan het uiteindelijk totaal impulsmoment, geef de vergelijking die het behoud van het impulsmoment voor dit probleem weergeeft.	0.3
----	---	-----

## 2. De Uiteindelijke Afstand tussen Aarde en Maan en de Uiteindelijke hoekfrequentie van het Aarde – Maan Systeem.

Neem aan dat de gravitatie vergelijking voor de cirkelbeweging van de Maan om de Aarde geldt.

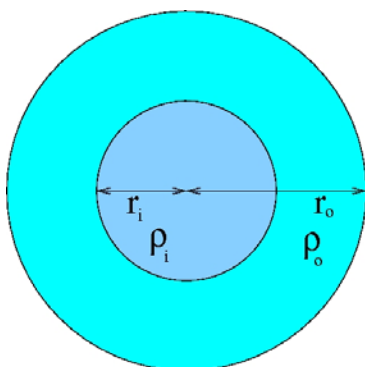
2a	Geef de gravitatie vergelijking voor de cirkelvormige baanbeweging van de Maan om de Aarde in de eind situatie, uitgedrukt in $M_E$ , $\omega_2$ , $G$ en de uiteindelijk afstand $D_2$ tussen de Aarde en de Maan. $M_E$ is de massa van de Aarde en $G$ is de gravitatie constante.	0.2
----	---	-----

2b	Geef de vergelijking voor de uiteindelijk afstand $D_2$ tussen de Aarde en de Maan uitgedrukt in de bekende parameters, $L_1$ , het totale impulsmoment van het systeem, $M_E$ en $M_M$ , de massas van de Aarde en de Maan en $G$ de gravitatie constante.	0.5
----	---	-----

2c	Geef de vergelijking voor de uiteindelijk hoekfrequentie $\omega_2$ van het Aarde – Maan systeem uitgedrukt in $L_1$ , $M_E$ , $M_M$ en $G$ .	0.5
----	---	-----

Verderop zal je gevraagd worden de numerieke waarde van  $D_2$  en  $\omega_2$  te bepalen. Om dit te kunnen doen moet je het traagheidsmoment van de Aarde kennen.

2d	Geef de vergelijking van het traagheidsmoment $I_E$ van de Aarde, neem aan dat de Aarde een bol is met een binnen dichtheid $\rho_i$ van het middelpunt tot straal $r_i$ , en de buiten dichtheid $\rho_o$ van straal $r_i$ to het oppervlak bij straal $r_o$ (zie figuur 3).	0.5
----	---	-----



Figuur 3. De Aarde als bol met twee dichtheden,  $\rho_i$  en  $\rho_o$ .

Bepaal de gevraagde numerieke waarden in dit vraagstuk steeds in twee significante cijfers.

2e	Bereken het traagheidsmoment van de Aarde $I_E$ , maak gebruik van $\rho_i = 1.3 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$ , $r_i = 3.5 \times 10^6 \text{ m}$ , $\rho_o = 4.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , en $r_o = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ .	0.2
----	---	-----

De massa's van de Aarde en Maan zijn respectievelijk  $M_E = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$  en  $M_M = 7.3 \times 10^{22} \text{ kg}$ . De huidige afstand tussen de Aarde en de Maan is  $D_1 = 3.8 \times 10^8 \text{ m}$ . De huidige hoekfrequentie van de rotatie van de Aarde om haar as is  $\omega_{EI} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . De huidige hoekfrequentie van de beweging van de Maan om de Aarde is  $\omega_{MI} = 2.7 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ , en de gravitatie constante  $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

2f	Bereken de numerieke waarde van de het totale impulsmoment van het systeem, $L_I$ .	0.2
----	---	-----

2g	Bereken de uiteindelijke afstand $D_2$ tussen de Aarde en de maan in meters, en druk die eveneens uit in $D_1$ .	0.3
----	--	-----

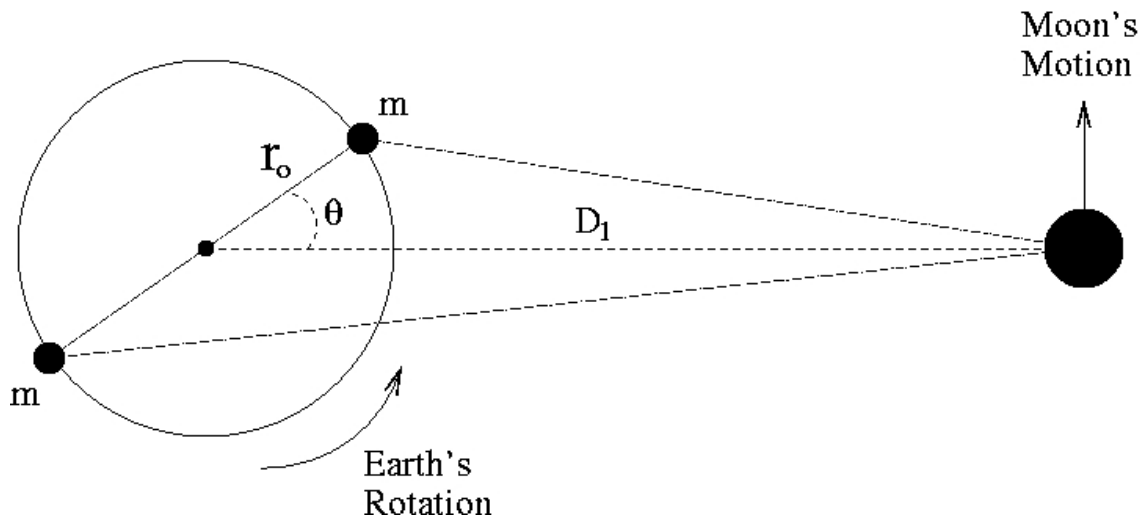
2h	Bereken de uiteindelijke hoekfrequentie $\omega_2$ in $\text{s}^{-1}$ , alsook de uiteindelijke daglengte uitgedrukt in de huidige daglengte.	0.3
----	---	-----

Ga na dat de aanname van verwaarlozing van de bijdrage van de rotatie van de Aarde aan het uiteindelijk impulsmoment geoorloofd is door de verhouding tussen de uiteindelijke impulsmomenten van de Aarde en de Maan te vinden. Deze verhouding moet klein zijn.

2i	Bereken de verhouding van de uiteindelijke impulsmomenten van de Aarde en de Maan.	0.2
----	--	-----

### 3. Met welk bedrag neemt de afstand tussen Aarde en Maan toe per jaar?

Nu bepaal je met welk bedrag de afstand tussen de Aarde en de Maan elk jaar toeneemt. Hiervoor heb je de vergelijking van het huidig krachtmoment nodig dat werkt op de maan. Neem aan dat de twee getijde-uitstulpingen benaderd kunnen worden door twee puntmassa's, elk met een massa  $m$ , gelocaliseerd op het oppervlak van de Aarde, zie Figuur 4. Noem  $\alpha$  de hoek tussen de lijn die gaat door de uitstulpingen en de lijn die de middelpunten van de Aarde en de Maan verbindt.



Figuur 4. Schematische weergave voor het maken van een schatting van het krachtmoment op de Maan dat wordt veroorzaakt door de uitstulpingen op de Aarde. De tekening is niet op schaal.

3a	Geef $F_c$ , de grootte van de kracht uitgeoefend op de Maan door de dichtsbij zijnde puntmassa.	0.4
----	--	-----

3b	Geef $F_f$ , de grootte van de kracht uitgeoefend op de Maan door de puntmassa die het verst gelegen is.	0.4
----	--	-----

Je kunt nu de krachtmomenten berekenen die de puntmassas veroorzaken.

3c	Geef de grootte van $\tau_c$ , het krachtmoment veroorzaakt door de dichtsbij zijnde puntmassa.	0.4
----	---	-----

3d	Geef de grootte van $\tau_f$ , het krachtmoment veroorzaakt door de puntmassa die het verst gelegen is.	0.4
----	---	-----

3e	Geef de grootte van het totale krachtmoment $\tau$ veroorzaakt door de twee massas. Daar $r_o \ll D_1$ moet jij je resultaat benaderen met de laagst significante macht in $r_o/D_1$ . Je mag gebruik maken van de relatie $(1+x)^a \approx 1 + ax$ , indien $x \ll 1$	1.0
----	--	-----

3f	Bereken de numerieke waarde van het krachtmoment $\tau$ , neem daarbij aan dat $\theta = 3^\circ$ en dat $m = 3.6 \times 10^{16}$ kg (let op, deze massa is in de orde van $10^8$ keren de massa van de Aarde).	0.5
----	---	-----

Het krachtmoment is gelijk aan de verandering van het impulsmoment met de tijd. Bepaal met dit gegeven de huidige toename van de afstand Aarde – Maan, per jaar. Om dit te doen moet je het impulsmoment van de Maan alleen uitdrukken in  $M_M, M_E, D_1$  en  $G$ .

3g	Geef de huidige toename in/van de afstand Aarde – Maan, per jaar.	1.0
----	---	-----

Maak tenslotte een schatting van de toename van de daglengte per jaar.

3h	Bereken de huidige afname van $\omega_{EI}$ per jaar en met welk bedrag neemt de lengte van de dag per jaar toe.	1.0
----	--	-----

#### 4. Waar gaat de energie naar toe?

In tegenstelling tot het impulsmoment, dat behouden blijft, is de totale energie (som van rotatie- en gravitatie-energie) van het systeem niet behouden. We zullen dit in de laatste sectie bekijken.

4a	Geef een vergelijking voor de totale energie (rotatie en gravitatie), van het huidige Aarde – Maan systeem, $E$ . Druk deze vergelijking alleen uit in $I_E$ , $\omega_{EI}$ , $M_M$ , $M_E$ , $D_I$ en $G$ .	0.4
----	---	-----

4b	Geef een vergelijking voor de verandering van $E$ , $\Delta E$ , als functie van de verandering in $D_I$ en $\omega_{EI}$ . Bereken de numerieke waarde van $\Delta E$ over de periode van een jaar, maak gebruik van de waarden van de verandering in $D_I$ en $\omega_{EI}$ die je gevonden hebt in 3g en 3h.	0.4
----	---	-----

Ga na dat dit verlies aan energie niet strijdig is met een schatting voor de energie-afgifte als warmte die in de getijden wordt geproduceerd door de Maan op Aarde. Neem aan dat de gemiddelde stijging een 0.5 m is, een laag water van  $h = 0.5$  m diep, die het oppervlak van de Aarde bedekt (neem voor eenvoudige oplossing aan dat het gehele oppervlak van de Aarde bedekt is met water). Dit gebeurt tweemaal per dag. Neem verder aan dat 10% van de gravitatie-energie als warmte wordt gedissipeerd ten gevolge van de viscositeit (inwendige wrijving) als de waterhoogte daalt. Kies voor de dichtheid van water  $\rho_{water} = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , en voor de valversnelling aan het Aardoppervlak  $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$ .

4c	Bereken de massa van deze laag water die het gehele oppervlak van de Aarde bedekt?	0.2
----	--	-----

4d	Bereken hoeveel energie in een jaar dissipeert. Hoe staat dit in verband met het huidige energieverlies van het Aarde – Maan systeem per jaar.	0.3
----	--	-----



**Anwoord Formulier**  
**Theoretisch Vraagstuk No. 1**  
**Evolutie van het aarde-maan systeem**

**1. Behoud van Impulsmoment.**

1a		0.2
----	--	-----

1b		0.2
----	--	-----

1c		0.3
----	--	-----

**2. De Uiteindelijke Afstand tussen Aarde en Maan en de Uiteindelijke hoekfrequentie van het Aarde – Maan Systeem.**

2a		0.2
----	--	-----

2b		0.5
----	--	-----

2c		0.5
----	--	-----

2d		0.5
----	--	-----

2e		0.2
----	--	-----

2f		0.2
----	--	-----

2g		0.3
----	--	-----

2h		0.3
----	--	-----

2i		0.2
----	--	-----

**3. Met welk bedrag neemt de afstand tussen Aarde en Maan toe per jaar?**

3a		0.4
----	--	-----

3b		0.4
----	--	-----

3c		0.4
----	--	-----

3d		0.4
----	--	-----

3e		1.0
----	--	-----

3f		0.5
----	--	-----

3g		1.0
----	--	-----

3h		1.0
----	--	-----

**4. Waar gaat de energie naar toe?**

4a		0.4
----	--	-----

4b		0.4
----	--	-----

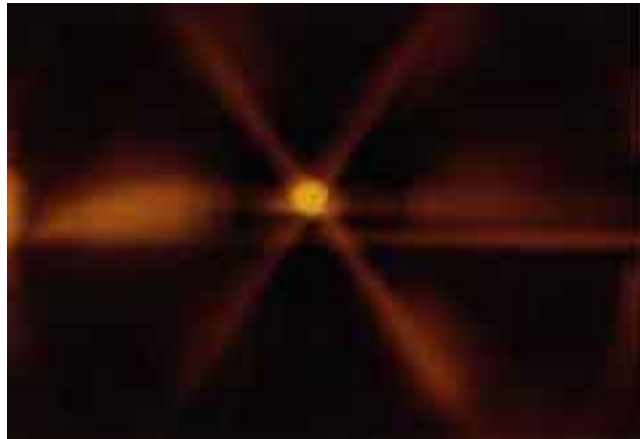
4c		0.2
----	--	-----

4d		0.3
----	--	-----

## Theoretisch vraagstuk 2

### ‘DOPPLER LASER COOLING’ EN OPTISCHE ‘STROOP’

In dit vraagstuk ontwikkel je een eenvoudige theorie die toelaat de fenomenen ‘laser cooling’ en ‘optische stroop’ te verstaan. Dit verwijst naar de afkoeling van een bundel neutrale atomen, bijvoorbeeld natriumatomen, door in tegengestelde zin (of richting) bewegende laserbundels, met dezelfde frequentie. Dit is een deel van de Nobelprijs uitgereikt aan S. Chu, P. Phillips en C. Cohen-Tannoudji in 1997.



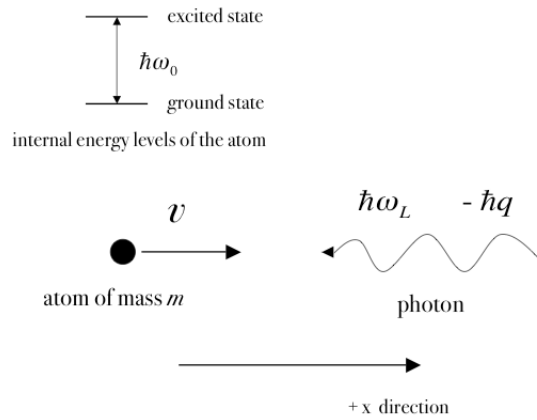
De foto toont natriumatomen (de heldere vlek in het centrum) gevangen in het snijpunt van drie orthogonale paren van tegengesteld gerichte laserstralen. Het gebied waar ze vastgehouden worden wordt ‘optische stroop’ genoemd, omdat de absorberende optische kracht lijkt op de wrijving die wordt uitgeoefend op een voorwerp dat beweegt in stroop.

In deze opgave analyseer je het fenomeen van de interactie tussen een foton dat invalt op een atoom en het principe van het samendrijvend mechanisme in één dimensie.

#### DEEL I: BASIS VAN DE ‘LASER COOLING’

Beschouw een atoom met massa  $m$  dat in de  $+x$  richting beweegt met een snelheid  $v$ . Voor de eenvoud veronderstellen we dat het probleem 1-dimensionaal is, we verwaarlozen de  $y$ - en  $z$ -richting (zie figuur 1). Het atoom heeft twee interne energieniveaus. De energie van het laagste niveau is gelijk aan nul gesteld en de energie van van de aangeslagen toestand gelijk aan  $\hbar\omega_0$  met  $\hbar = h/2\pi$ . Bij de start bevindt het atoom zich op het laagste energieniveau. Een laserbeam met hoekfrequentie (pulsatie)  $\omega_L$  in het laboratorium, is gericht volgens de  $-x$  richting en heeft een wisselwerking met het atoom. Volgens de kwantummechanica bestaat een laserbundel uit een groot aantal fotonen, elk met een energie  $\hbar\omega_L$  en bewegingshoeveelheid of impuls  $-\hbar q$  (met  $q = 2\pi/\lambda$ ). Een foton kan geabsorbeerd worden door het atoom en daarna weer worden uitgezonden. Deze uitzending kan in de  $+x$  en de  $-x$ -richting gebeuren met dezelfde waarschijnlijkheid. Omdat het atoom beweegt met een niet-relativistische snelheid  $v/c \ll 1$  (met  $c$  de lichtsnelheid), moet je alleen de eerste orde termen behouden. Neem aan dat  $\hbar q / mv \ll 1$ , dit betekent dat de bewegingshoeveelheid

of impuls van het atoom veel groter is dan die van van een enkel foton. Behoud in je antwoord alleen lineaire correcties in alle hierboven gevraagde grootheden.



Figuur 1. Schema van een atoom met massa  $m$  en snelheid  $v$  bewegend in de  $+x$  zin, dat botst met een foton met energie  $\hbar\omega_L$  en bewegingshoeveelheid (impuls)  $-\hbar q$ . Het atoom heeft twee inwendige energieniveau's met een energieverval gelijk aan  $\hbar\omega_0$ .

Neem aan dat de hoekfrequentie (pulsatie)  $\omega_L$  van de laser zo is afgesteld dat ten opzichte van een bewegend atoom het de aanslagfrequentie (inwendige transitie) van het atoom is.

Beantwoord de volgende vragen.

### 1. Absorptie

1a	Geef de resonantie voorwaarde voor absorptie van het proton.	0.2
1b	Geef de uitdrukking voor de impuls (bewegingshoeveelheid) $p_{at}$ van het atoom na absorptie van het foton, gezien in het laboratoriumstelsel.	0.2
1c	Geef de uitdrukking voor de totale energie $\varepsilon_{at}$ van het atoom na de absorptie, gezien in het laboratoriumstelsel.	0.2

### 2. Spontane emissie van een foton in de $-x$ richting (-zin)

Enige tijd na de absorptie van een invallend foton, kan het atoom een foton uitzenden in de  $-x$ -richting (-zin).

2a	Geef de uitdrukking voor de energie van het uitgezonden foton, $\varepsilon_{ph}$ na emissie in de $-x$ -richting (-zin), gezien vanuit het laboratorium.	0.2
----	---	-----

2b	Geef de uitdrukking voor de bewegingshoeveelheid $p_{ph}$ van het uitgezonden foton na het emissieproces in de $-x$ -richting (-zin), gezien vanuit het laboratorium.	0.2
----	---	-----

2c	Geef de uitdrukking voor de impuls (bewegingshoeveelheid) $p_{at}$ van het atoom na de emissie in de $-x$ -richting (-zin), gezien vanuit het laboratorium.	0.2
----	---	-----

2d	Geef de uitdrukking voor de totale energie $\varepsilon_{at}$ van het atoom na de emissie in de $-x$ -richting (-zin), gezien vanuit het laboratorium.	0.2
----	--	-----

### 3. Spontane emissie van een foton in de $+x$ -zin

Enige tijd na de absorptie van een invallend foton, kan een atoom echter ook een foton uitzenden in de  $+x$ -richting (-zin).

3a	Geef de uitdrukking voor de energie $\varepsilon_{ph}$ n het uitgezonden foton, na de emissie in de $+x$ -richting (-zin), gezien vanuit het laboratorium.	0.2
----	--	-----

3b	Geef de uitdrukking voor de impuls (bewegingshoeveelheid) $p_{ph}$ van het uitgezonden foton, na emissie in de $+x$ -richting (-zin), gezien vanuit het laboratorium.	0.2
----	---	-----

3c	Geef de uitdrukking voor de impuls (bewegingshoeveelheid) $p_{at}$ van het atoom na emissie in de $+x$ -richting (-zin), gezien vanuit het laboratorium.	0.2
----	--	-----

3d	Geef de uitdrukking voor de totale energie $\varepsilon_{at}$ van het atoom na emissie in de $+x$ -richting (-zin), gezien vanuit het laboratorium.	0.2
----	---	-----

### 4. Gemiddelde emissie na de absorptie

De spontane emissie van een foton in de  $-x$ -zin of de  $+x$ -zin gebeurt met dezelfde waarschijnlijkheid. Daarvan uitgaand, beantwoord de volgende vragen

4a	Geef de uitdrukking voor de gemiddelde energie $\varepsilon_{ph}$ van een uitgezonden foton na emissie.	0.2
----	---	-----

4b	Geef de uitdrukking voor de gemiddelde impuls (bewegingshoeveelheid) $p_{ph}$ van een uitgezonden foton, na emissie.	0.2
----	--	-----

4c	Geef de uitdrukking voor de gemiddelde totale energie $\varepsilon_{at}$ van het atoom na emissie.	0.2
----	--	-----

4d	Geef de uitdrukking voor de gemiddelde impuls (bewegingshoeveelheid) $p_{at}$ van het atoom na emissie.	0.2
----	---	-----

### 5. Overdracht van energie en impuls (bewegingshoeveelheid)

Als je zoals hierboven beschreven, een volledige absorptie en emissie van één foton aanneemt, is er netto gemiddeld een overdracht van impuls (bewegingshoeveelheid) en energie tussen de straling van de laser en het atoom.

5a	Geef de uitdrukking voor de gemiddelde energieverandering $\Delta\varepsilon$ van het atoom na een volledig absorptie-emissie proces van een foton.	0.2
5b	Geef de uitdrukking voor de gemiddelde verandering van impuls (bewegingshoeveelheid) $\Delta p$ van het atoom na een volledig absorptie-emissieproces van een foton.	0.2

### 6. Overdracht van energie en impuls (bewegingshoeveelheid) van een laserbundel in de $+x$ -richting (zin)

Veronderstel nu dat een laserbundel met hoekfrequentie (pulsatie)  $\omega'_L$  in de  $+x$ -richting (zin) invalt op een atoom dat in de  $+x$ -richting (-zin) beweegt met een snelheid  $v$ . Veronderstel dat er resonantie is tussen de interne energieovergang van het atoom en de laserbundel, gezien door het atoom. Beantwoord de volgende vragen:

6a	Geef de uitdrukking voor de gemiddelde energieverandering $\Delta\varepsilon$ van het atoom na een volledig absorptie-emissieproces voor een foton.	0.3
----	---	-----

6b	Geef de uitdrukking voor de gemiddelde verandering $\Delta p$ van de impuls (bewegingshoeveelheid) van het atoom na een volledig absorptie-emissieproces voor een foton.	0.3
----	--	-----

## DEEL II: ENERGIEAFGIFTE EN DE GRONDBEGINSELEN VAN 'OPTISCHE STROOP'

Door de natuur werd bij kwantumprocessen een onzekerheid ingebouwd. Het feit dat



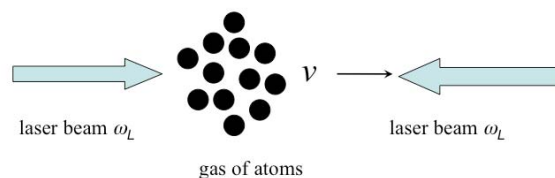
een atoom spontaan een foton kan uitzenden in een *zekere tijd* na de absorptie, resulteert er in dat de resonantievoorwaarde niet *exact* gehoorzaamd moet worden zoals hierboven werd beschreven. Daardoor kan de hoekfrequentie (pulsatie)  $\omega_L$  en  $\omega'_L$  van de laserbundels elke mogelijke waarde aannemen en het absorptie-emissieproces kan dan toch plaats vinden. Dit kan met verschillende (kwantum)waarschijnlijkheid voorkomen en zoals je kunt verwachten, wordt de maximale waarschijnlijkheid gevonden bij de exacte resonantievoorwaarde. De tijd tussen een enkel proces van absorptie en emissie wordt de levensduur van een aangeslagen atoom (met hoger energieniveau) genoemd en wordt weergegeven als  $\Gamma^{-1}$ .

Beschouw  $N$  atomen in rust in het referentiestelsel van het laboratorium en een laserbeam met hoekfrequentie (pulsatie)  $\omega_L$  dat er op invalt. De atomen absorberen en emitteren continu zodat er gemiddeld  $N_{exc}$  atomen in de geëxiteerde (aangeslagen) toestand verkeren en dus  $(N - N_{exc})$  atomen in de laagste toestand zitten. Een kwantummechanische berekening levert het volgende resultaat:

$$N_{exc} = N \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}$$

Hierin is  $\omega_0$  de hoekfrequentie (pulsatie) bij resonantie van de atomaire energieovergang en  $\Omega_R$  de zogenaamde Rabi hoekfrequentie (pulsatie).  $\Omega_R^2$  is evenredig met de intensiteit van de laserbundel. Zoals hierboven gezegd, kun je zien dat dit aantal verschillend is van nul zelfs als de resonantiefrequentie (-pulsatie)  $\omega_0$  verschillend is van de frequentie  $\omega_L$  van de laserbundel. Een alternatieve manier om dit resultaat uit te drukken is dat het aantal absorptie-emissieprocessen per tijdseenheid gelijk is aan  $N_{exc} \Gamma$ .

Beschouw de fysische situatie voorgesteld in Figuur 2 waar twee tegengestelde laserbundels met dezelfde willekeurige hoekfrequentie (pulsatie)  $\omega_L$  die invallen op een gas bestaande uit  $N$  atomen die bewegen in de  $+x$ -zin (-richting) met een snelheid  $v$ .



Figuur 2: Twee tegengestelde laserbundels met dezelfde willekeurige hoekfrequentie (pulsatie)  $\omega_L$  die invallen op een gas bestaande uit  $N$  atomen die bewegen volgens de

+ $x$ -zin (-richting) met een snelheid  $v$ .

### 7. Kracht op een bundel atomen veroorzaakt door lasers

7a	Geef aan de hand van de informatie die je hebt, de kracht die de laser uitoefent op de bundel atomen. Veronderstel hierbij dat $mv \gg \hbar q$ .	1.5
----	---	-----

### 8. Limiet bij lage snelheid

Neem aan dat de snelheid van de atomen klein genoeg is zodat je de krachtfunctie mag ontwikkelen tot en met de eerste orde van  $v$ .

8a	Geef voor dit limietgeval, een uitdrukking voor de kracht die je vond in vraag (7a).	1.5
----	--	-----

Uitgaande van dit resultaat kun je de voorwaarde vinden voor het versnellen, afremmen of in het geheel geen snelheidsverandering van de atomen door de laserstraling.

8b	Geef de voorwaarde voor een positieve kracht (versnellen van de atomen).	0.25
----	--	------

8c	Geef de voorwaarde voor een kracht gelijk aan nul.	0.25
----	--	------

8d	Geef de voorwaarde voor een negatieve kracht (afremmen van de atomen).	0.25
----	--	------

8e	Veronderstel nu dat de atomen bewegen met een snelheid $-v$ (in de $-x$ -zin (-richting)). Geef de voorwaarde waarbij nu een afremmende kracht werkt op de atomen.	0.25
----	--	------

### 9. Optische stroop

In het geval van een negatieve kracht, krijg je een energieontwikkeling ten gevolge van de wrijvingskracht. Veronderstel dat bij de start op  $t = 0$ , het gas bestaande uit atomen een snelheid  $v_0$  heeft.

9a	Geef voor de limiet van lage snelheden, een uitdrukking voor de snelheid van de atomen nadat de laserbundels een tijd $\tau$ aanstaan.	1.5
----	--	-----

9b	Veronderstel nu dat het gas bestaande uit atomen in thermisch evenwicht is bij een temperatuur $T_0$ . Geef de temperatuur $T$ nadat de lasers een tijd $\tau$ aanstaan.	0.5
----	--	-----

Dit model mag je niet toepassen op willekeurige lage temperaturen.

**Antwoord formulier**  
**Theoretisch vraagstuk No. 2**

**DOPPLER LASER COOLING EN OPTISCHE STROOP**

**DEEL I: BASIS VAN LASER COOLING**

**1. Absorptie**

1a		0.2
----	--	-----

1b		0.2
----	--	-----

1c		0.2
----	--	-----

**2. Spontane emissie in de  $-x$  richting (-zin)**

2a		0.2
----	--	-----

2b		0.2
----	--	-----

2c		0.2
----	--	-----

2d		0.2
----	--	-----

**3. Spontane emissie in de  $+x$  richting (-zin)**

3a		0.2
----	--	-----

3b		0.2
----	--	-----

3c		0.2
----	--	-----

3d		0.2
----	--	-----

**4. Gemiddelde emissie na absorptie**

4a		0.2
----	--	-----

4b		0.2
----	--	-----

4c		0.2
----	--	-----

4d		0.2
----	--	-----

### 5. Overdracht van energie en impuls (bewegingshoeveelheid)

5a		0.2
----	--	-----

5b		0.2
----	--	-----

### 6. Overdracht van energie en impuls (bewegingshoeveelheid) met een laserbeam in de $+x$ richting (-zin)

6a		0.3
----	--	-----

6b		0.3
----	--	-----

## DEEL II: ABSORPTIE EN 'OPTISCHE MOLASSES'

### 7. Kracht op een bundel atomen door lasers

7a		1.5
----	--	-----

### **8. Lage snelheidslimiet**

8a		1.5
----	--	-----

8b		0.25
----	--	------

8c		0.25
----	--	------

8d		0.25
----	--	------

8e		0.25
----	--	------

## 9. Optische stroop

9a		1.5
----	--	-----

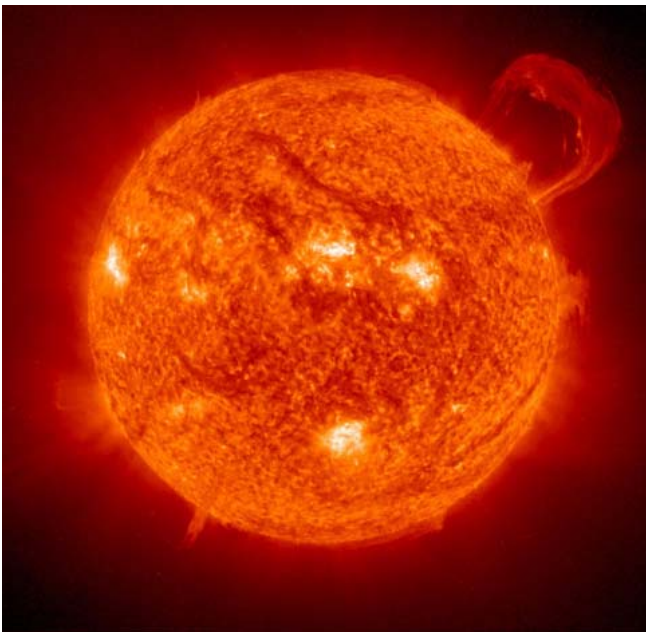
9b		0.5
----	--	-----



### Theoretisch probleem 3

#### Waarom zijn de sterren zo groot?

De sterren bestaan uit hete gasbollen.. De meesten ervan stralen zichtbaar licht uit, omdat ze waterstof tot helium fuseren in hun binnenste. In dit probleem gebruiken we zowel de concepten van klassieke al kwantummechanica, evenals van de elektrostatisch en de thermodynamica, om te begrijpen waarom sterren groot genoeg moeten zijn om hun fusieproces te bereiken en ook af te leiden wat de massa en de straal van de kleinste ster zou moeten zijn die waterstof kan fuseren.



Figuur 1. Onze zon straalt, zoals de meeste sterren, zichtbaar licht uit tengevolge van thermonucleaire fusie van waterstof tot helium in zijn binnenste.

#### NUTTIGE CONSTANTEN

Gravitatie constante =  $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^2$

Constante van Boltzmann =  $k = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$

Constante van Planck =  $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg s}$

Massa van het proton =  $m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Massa van het electron =  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Eenheid van lading =  $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Dielectrische constante (vacuum permittivity) =  $\epsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$

Straal van de zon =  $R(\text{Sun}) = 7.0 \times 10^8 \text{ m}$

Massa van de zon =  $M(\text{Sun}) = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$

1. Een klassieke schatting van de temperatuur in het centrum van de sterren.

Veronderstel dat het gas waaruit de ster gevormd is, bestaat uit puur geïoniseerd waterstof. (elektronen en protonen in gelijke hoeveelheden), en dat het zich gedraagt als een ideaal gas.

Vanuit de klassieke theorie moeten twee protonen om te fuseren op maximaal  $10^{-15}$  m afstand van elkaar zijn om de sterke kernkracht die een korte dracht heeft dominant te laten zijn. Dit is een aantrekkende kracht. Echter, om de protonen samen te laten brengen moeten ze een afstotende coulombkracht overwinnen. Veronderstel klassiek gezien dat de twee protonen (als puntmassa) bewegen in tegengestelde richting met een snelheid  $v_{rms}$ , de middelbare snelheid (wortel uit v-kwadraat) van de protonen in de een-dimensionale frontale botsing.

1a	Wat moet de temperatuur $T_c$ van het gas zijn, opdat kleinste afstand $d_c$ van de protonen gelijk is aan $10^{-15}$ m? Geef deze en alle numerieke waarden in deze vraag in twee significante cijfers.	1.5
----	--	-----

## 2. Vaststellen dat de vorige temperatuurschatting fout is.

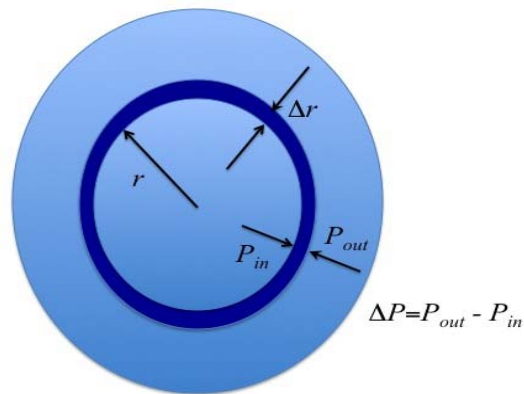
Om na te gaan of de vorige temperatuurschatting redelijk is heb je een onafhankelijke manier van schatten van de centrale temperatuur van de ster nodig. De structuur van sterren is erg gecompliceerd maar we kunnen duidelijk inzicht verkrijgen met enige aannamen.

Sterren zijn in evenwicht, dat wil zeggen, zij expanderen of imploderen niet doordat de naar binnen gerichte zwaartekracht in evenwicht is met de naar buiten gerichte kracht van de druk (Zie figuur 2.).

Voor een schil gas wordt de vergelijking van het hydrostatisch evenwicht op een gegeven afstand  $r$  van het centrum van de ster gegeven door

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = - \frac{GM_r \rho_r}{r^2},$$

Met  $P$  de druk van het gas,  $G$  de gravitatieconstante,  $M_r$  de massa van de ster binnen een bol met een straal  $r$ , en  $\rho_r$  de dichtheid van het gas in de schil.



Figuur 2. De sterren zijn in hydrostatisch evenwicht: de drukverandering is in evenwicht met de gravitatie

Een schatting van de orde van grootte van de temperatuur in het centrum van de ster kun je bereiken met de waarde van de variabelen in het centrum en de oppervlakte van de ster, gebruikmakend van de volgende aannamen:

$$\Delta P \approx P_o - P_c,$$

Waarin  $P_c$  en  $P_o$  de drukken in het centrum, respectievelijk aan de oppervlakte van de ster zijn.

Omdat  $P_c \gg P_o$ , kunnen we veronderstellen dat

$$\Delta P \approx -P_c.$$

binnen dezelfde aanname kunnen we schrijven

$$\Delta r \approx R,$$

waarin  $R$  de totale straal van de ster is en

$$M_r \approx M_R = M,$$

met  $M$  de totale massa van de ster.

De dichtheid mag worden benaderd door zijn waarde in het centrum,

$$\rho_r \approx \rho_c.$$

Je mag aannemen dat de druk die van een ideaal gas is.

2a	Geef de vergelijking van de temperatuur in het centrum van de ster, $T_c$ , uitgedrukt enkel in termen van de straal en massa van de ster en fysische constanten.	0.5
----	---	-----

We kunnen nu de volgende voorspelling van dit model gebruiken als een criterium voor zijn geldigheid:

2b	Schrijf met gebruik van de vergelijking die je in (2a) hebt gevonden de verhouding $M/R$ op die verwacht kan worden voor een ster in termen van alleen fysische constanten en $T_c$ .	0.5
----	---	-----

2c	Gebruik de waarde van $T_c$ die je in (1a) hebt afgeleid en vindt een numerieke waarde voor de verhouding $M/R$ die voor een ster te verwachten is.	0.5
----	---	-----

2d	Bereken nu de verhouding $M(Sun)/R(Sun)$ op grond van de gegeven straal en massa van de zon en controleer of deze waarde veel kleiner is dan wat je in (2c) gevonden hebt.	0.5
----	--	-----

### 3. Een kwantummechanische schatting van de temperatuur in het centrum van de zon

Het grote verschil dat je in (2d) gevonden hebt suggereert dat de klassiek schatting voor  $T_c$  uit (1a) niet juist is. De oplossing voor dit verschil kunnen we vinden als we de kwantummechanische effecten beschouwen die ons vertellen dat protonen zich gedragen als golven en dat een enkel proton uitgesmeerd is over een gebied in orde van grootte van  $\lambda_p$ , de de Brogliegolflengte. Dit houdt in dat als  $d_c$ , de kleinste onderlinge afstand van de protonen in orde van  $\lambda_p$  is, de protonen ion kwantummechanische zin overlappen en kunnen fuseren.

3a	Geef een vergelijking voor $T_c$ enkel in termen van fysische constanten voor een proton met snelheid $v_{rms}$ , ervan uitgaande dat $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ de voorwaarde voor fusie is,	1.0
----	--	-----

3b	Evalueer getalsmatig de waarde voor $T_c$ die je in (3a) hebt verkregen.	0.5
----	--	-----

3c	Gebruik de waarde voor $T_c$ die je in (3b) hebt afgeleid om de numerieke waarde te berekenen voor de verhouding $M/R$ die voor een ster verwacht mag worden, met gebruik van de formule die in (2b) is afgeleid. Controleer of deze waarde precies dezelfde is als de waargenomen verhouding $M(Sun)/R(Sun)$ .	0.5
----	---	-----

Sterren in de zogeheten *hoofdreeks* (waterstof fuserend) volgen inderdaad ongeveer deze verhouding over een grote massareeks.

### 4. De verhouding massa/straal van de sterren

De vorige overeenkomst suggereert dat de kwantummechanische benadering voor het schatten van de temperatuur in het centrum van de zon juist is.

4a	Gebruik de voorafgaande resultaten om aan te tonen dat voor elke ster die waterstof fuseert de verhouding van de massa $M$ tot de straal $R$ constant	0.5
----	---	-----

	is en alleen afhangt van fysische constanten. Geef de vergelijking voor de verhouding $M/R$ voor sterren die waterstof fuseren.	
--	---	--

### 5. De massa en straal van de kleinste ster.

Het resultaat dat je in (4a) gevonden hebt, suggereert dat de sterren elke massa kunnen hebben, zolang aan deze verhouding voldaan is; echter dat is niet waar.

Van het gas binnen normale sterren die waterstof fuseren is bekend dat het zich ongeveer gedraagt als een ideaal gas. Dit betekent dat  $d_e$  de typische afstand *tussen twee elektronen* gemiddeld groter is dan  $\lambda_e$ , hun typische de Broglie golflengte. Als de elektronen dichtter bij elkaar zijn, zijn ze in de zogeheten gedegenererde toestand en zouden de sterren zich anders gedragen. Let op de verschillende manieren waarop elektronen en protonen zich in de ster gedragen. Voor protonen zullen de de Broglie golflengten elkaar sterk overlappen als ze botsen om te fuseren, terwijl voor elektronen hun de Broglie golflengten niet moeten overlappen om als ideaal gas te blijven bestaan.

De dichtheid in de sterren neemt toe bij afnemende straal. Echter, neem aan dat voor deze orde van grootte schatting de dichtheid constant is. Je mag verder gebruiken dat  $m_p \gg m_e$ .

5a	Geef een vergelijking voor $n_e$ , de gemiddelde elektronendichtheid binnen de ster.	0.5
----	--	-----

5b	Geef een vergelijking voor $d_e$ , de typische afstand tussen twee elektronen in een ster.	0.5
----	--	-----

5c	Gebruik de voorwaarde dat $d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}$ om de vergelijking op te schrijven voor de straal van de kleinst mogelijke gewone ster. Neem voor de temperatuur in het binnenste van de ster de temperatuur van het centrum (de kern) van de ster.	1.5
----	--	-----

5d	Geef een numerieke waarde voor de straal van de kleinst mogelijke normale ster, zowel in meters als met de straal van de zon als eenheid.	0.5
----	---	-----

5e	Geef de numerieke waarde van de massa van de kleinst mogelijke normale ster zowel in kilogram als met de zonsmassa als eenheid.	0.5
----	---	-----

### 6. Fusie van heliumkernen in oudere sterren.

Als sterren ouder worden, hebben ze het meeste van de waterstof in hun kernen gefuseerd tot helium (He), zodat ze gedwongen worden de fusie van helium tot zwaardere elementen op te starten om licht te blijven geven. Een heliumkern heeft twee

protonen en twee neutronen zodat het twee keer de lading en ongeveer vier keer de massa van een proton heeft. We zagen al eerder dat de voorwaarde voor protonfusie

$$d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}} \text{ is.}$$

6a	Maak eenzelfde vergelijking voor heliumkernen en vind $v_{rms}(He)$ , de middelbare snelheid van de heliumkernen en $T(He)$ , de temperatuur die nodig is voor heliumfusie.	0.5
----	---	-----

**Antwoordformulier**  
**Theoretisch Vraagstuk No. 3**  
**Waarom zijn de sterren zo groot.?**

*1) Een klassieke schatting van de temperatuur in het centrum van de sterren.*

1a		1.5
----	--	-----

*2) Vaststellen dat de vorige temperatuurschatting fout is.*

2a		0.5
----	--	-----

2b		0.5
----	--	-----

2c		0.5
----	--	-----

2d		0.5
----	--	-----

3) *Een kwantummechanische schatting van de temperatuur in het centrum van de zon*

3a		1.0
----	--	-----

3b		0.5
----	--	-----

3c		0.5
----	--	-----

4) *De verhouding massa/straal van de sterren*

4a		0.5
----	--	-----



5) *De massa en straal van de kleinste ster.*

5a		0.5
----	--	-----

5b		0.5
----	--	-----

5c		1.5
----	--	-----

5d		0.5
----	--	-----

5e		0.5
----	--	-----

6) *Fusie van heliumkernen in oudere sterren.*

6a		0.5
----	--	-----