Woensdag 12 april 2017

1 **Eenheden.** (200 Puzzling Physics Problems. Problem 59)

Met de gegeven afhankelijkheden kunnen we opstellen:

$$P \propto g^\alpha \times L^\beta \times \rho_{hel}^\gamma \times \rho_{lucht}^\delta$$

Met de eenheden volgt:

$$\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^3}} = \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\right)^\alpha \times \mathrm{m}^\beta \times \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\right)^\gamma \times \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\right)^\delta$$

Dit levert de volgende vergelijkingen op:

$$\gamma + \delta = 1$$
$$\alpha + \beta - 3(\gamma + \delta) = 2$$
$$-2\alpha = -3$$

Om een uitspraak te kunnen doen hebben we alleen β nodig. Door de eerste en derde vergelijking in de tweede in te vullen volgt: $\beta = \frac{7}{2}$

Oftewel: $P_B/P_B = \left(\frac{1}{2}\right)^{7/2} = 0{,}088$

2 **Fontein.** (Hans Jordens)

Wiki: The water jet is powered by two 560 kilowatt electric motors driving four stage centrifugal pumps capable of pumping up to 250 litres per second against a head of 183 metres. The water velocity at the water nozzle is 260 km/h. While running both pumps simultaneously the main jet throws approximately six tons of water into the air at any instant, reaching a maximum height of 147 metres.

De pomp geeft het water een zekere snelheid v mee.

Het water komt 147 meter hoog. De vluchttijd is dus (m.b.v. $s = \frac{1}{2}gt^2$):

$$t = 2\sqrt{\frac{2 \cdot 147}{9{,}81}} = 10{,}95\ \mathrm{s}$$

De (grootte van de) snelheid waarmee het water uit de pomp komt is hetzelfde als waarmee het water weer neerkomt. Te berekenen m.b.v. vrije val vanaf 147 m hoogte:

$$v = g \cdot t = 9{,}81 \cdot 5{,}47 = 53{,}7\ \mathrm{m/s}$$

Het volume dat per seconde omhoog gepompt wordt, is:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{6{,}0}{10{,}95} = 0{,}548\ \mathrm{m^3/s}$$

Per seconde geldt dus voor de pomp:

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}548\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{s}} \cdot 1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot (53{,}7)^2\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}} = 0{,}79 \cdot 10^6\frac{\mathrm{kgm^2}}{\mathrm{s^3}} = 0{,}79 \cdot 10^6\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$$

Alternatief:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dt} = \frac{1}{2}v^2\frac{dm}{dt} = \frac{1}{2}v^2\rho\frac{dV}{dt}$$

Neem als gemiddelde doorsnede van de fontein $\langle A\rangle$.

Dan is het volume water in de lucht: $\langle A\rangle \cdot 2h$

Oftewel: $6 = 2 \cdot 147 \cdot \langle A\rangle$

De gemiddelde doorsnede $\langle A\rangle$ is dus $0{,}0204\ \mathrm{m^2}$

Het (minimale) vermogen van de pomp is dus:

$$P=\frac{1}{2}v^2\rho\frac{dV}{dt}=\frac{1}{2}v^2\rho\langle A\rangle v=\frac{1}{2}v^3\rho\langle A\rangle$$

Energiebehoud om de snelheid te bepalen: $mgh=\frac{1}{2}mv^2$

$$v=\sqrt{2gh}$$

Invullen:

$$P=\frac{1}{2}v^3\rho\langle A\rangle=0{,}5\times(2gh)^{3/2}\times10^3\times0{,}0204=1{,}58$$

3 **Slinger.** (Jan Hoekstra)

Teken een raaklijn bij het steilste gebied van de kromme. De helling van deze raaklijn moet een versnelling van 9,8 m/s^2 opleveren (het voorwerp beweegt dan precies verticaal naar beneden). Met behulp van deze steilheid en de waarden op de t-as kunnen de waarden op de v-as worden vastgelegd (bv door de gevonden raaklijn evenwijdig naar de oorsprong te verschuiven).
Bepaal het oppervlak onder de kromme: levert een waarde van 1,4 meter.
Het voorwerp heeft dan een booglengte van 175 graden doorlopen.

$$\text{Booglengte}=r\times\theta$$

$$1{,}4=r\times\frac{175}{180}\times\pi$$

Dit levert $r=0{,}46\text{ m}$.
In plaats van de raaklijn bij het steilste gebied kan een leerling ook een raaklijn bij $t=0$ tekenen. De helling van deze raaklijn moet in verband met de zojuist besproken starthoek gelijk zijn aan $9{,}81\times\sin 5$. Ook hieruit vallen de waarden op de v-as te bepalen. Overigens is deze laatste methode wel iets onnauwkeuriger door het niet mooi continu zijn van de kromme in de buurt van $t=0$.

4 **Mengen** (oude olympiade opgave)

Men kan het vraagstuk algemeen oplossen voor willekeurige hoeveelheden en temperaturen (zolang er maar geen faseovergangen plaatsvinden) en voor willekeurige uitzettingscoëfficiënten en soortelijke warmten (zolang die maar niet van de temperatuur afhankelijk zijn).
Stel de lage begintemperatuur T_1 en het volume V_{10}. De hoge begintemperatuur T_2 en een volume V_{20}. Laat de eindtemperatuur T_e zijn, en het eindvolume V_e. Dan geldt:

$$\begin{array}{lll} T_1\rightarrow & T_e & \leftarrow T_2 \\ V_{10}\rightarrow & V_1 & \\ & V_2 & \leftarrow V_{20} \\ & \overline{}^{\,+} & \\ & V_e & \end{array}$$

Stel de uitzettingscoëfficiënt = b

$$\begin{aligned} V_e &= V_1+V_2=V_{10}\cdot\left[1+b\cdot(T_e-T_1)\right]+V_{20}\left[1-b\cdot(T_2-T_e)\right] \\ &= V_{10}+V_{20}+b\cdot\left[V_{10}\cdot(T_e-T_1)-V_{20}(T_2-T_e)\right] \end{aligned}$$

Nu volgt uit het behoud van energie dat opgenomen warmte = afgestane warmte zodat:

$$V_{10}\cdot(T_e-T_1)=V_{20}\cdot(T_2-T_e)$$

En dus is $V_1 + V_2 = V_{10} + V_{20}$; het volume verandert dus niet!

5 Aerocket

Eerst maar de volumes:

$$V_1 = 645 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}61 = 393{,}4 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3$$
$$V_2 = 645 \cdot 10^{-6} \cdot 2{,}13 = 1373{,}8 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3$$

(a) Het aantal mol lucht onder de raket na het pompen:

$$n = \frac{pV_1}{RT} = \frac{4{,}0 \cdot 10^5 \cdot 393{,}4 \cdot 10^{-6}}{8{,}31 \cdot 293} = 0{,}0646\ \mathrm{mol}$$

(b) Het is een adiabatisch proces, dus geldt:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

Of in een andere vorm:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

Omschrijven:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 293 \left(\frac{393{,}4}{1373{,}8}\right)^{0{,}4} = 177{,}7\ \mathrm{K}$$

(c) De hoeveelheid arbeid wordt gegeven door:

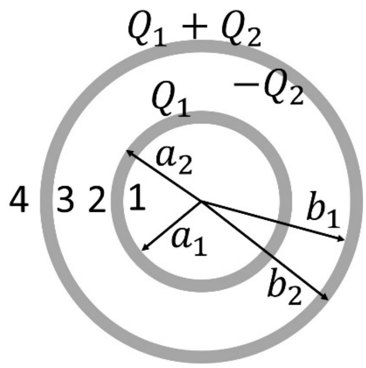
$$W = \tfrac{3}{2} nR(T_1 - T_2) = 1{,}5 \cdot 0{,}0646 \cdot 8{,}31 \cdot (293 - 177{,}7) = 92{,}8\ \mathrm{J}$$

(d) De snelheid kan met een energiebeschouwing worden berekend:

$W = mgh + \tfrac{1}{2} mv^2$

$$v^2 = \frac{2}{m}(W - mgh) = \frac{2}{0{,}6}\big(92{,}8 - 0{,}6 \cdot 9{,}91 \cdot (2{,}13 - 0{,}61)\big) =$$

6 2 bolletjes



By using Gauss's theorem and the fact that charges rearrange themselves so as to yield a zero electric field inside the conductors, we infer that all of Q_1 will reside on surface 2 of the inner sphere, $-Q_1$ on surface 3 of the outer sphere (no field in the interior of the outer sphere), and $Q_1 + Q_2$ on surface 4 of the outer sphere (see figure). The surface charge densities are straightforward to calculate as the charge divided by the surface area:

$\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \frac{Q_1}{4\pi a_2^2}$, $\sigma_3 = \frac{-Q_1}{4\pi a_2^2}$, $\sigma_4 = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi a_2^2}$

If $Q_2 = -Q_1$, there is no charge on the external shell, simply Q_1 on surface 2 and $-Q_1$ on surface 3. The mutual capacitance may be calculated form $\Delta V\ C = Q_1$ where ΔV is the difference in electric potential between the spherical shells. Again using Gauss's theorem to calculate the magnitude E of the electric field between the shells, we have:

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = 4\pi Q_1$$

$$E(r) = \frac{Q_1}{r^2}$$

$$-\Delta V = \int_{a_2}^{b_1} E(r) \cdot dr = -Q_1 \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{a_2}\right)$$

So:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{b_1}$$

$$C = \frac{a_2 b_1}{a_2 + b_1}$$

7 **CD.** (200 Puzzling Physics Problems, P126)

(a) Uit het plaatje is te halen dat er $\pi(58-25)^2 = 34{,}2\ \mathrm{cm}^2$ aan oppervlak is waar informatie op kan staan.

$$A_{bit} = \frac{34{,}2\ \mathrm{cm}^2}{650 \times 10^6 \times 8} = 6{,}6 \times 10^{-9}\ \mathrm{cm}^2$$

Als we aannemen dat het een vierkante vorm heeft dan heeft het een zijde van $0{,}8\ \mu\mathrm{m}$.

(b) Als de informatiedichtheid hetzelfde is zal bij het uitlezen van dezelfde hoeveelheid bits in dezelfde tijd bij punt A een grotere hoek zijn doorlopen. Daar is de draaisnelheid (of hoeksnelheid) dus groter.

8 **Nog een CD.** (Giancoli, 34-65)

In order for the two reflected halves of the beam to be $180°$ out of phase with each other, the minimum path difference ($2t$) should be $\frac{1}{2}\lambda$ in the plastic. Notice that there is no net phase difference between the two halves of the beam due to reflection, because both halves reflect from the same material.

$$2t = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{n} \rightarrow t = \frac{\lambda}{4n} = \frac{780\ \mathrm{nm}}{4 \cdot 1{,}55} = 126\ \mathrm{nm}$$

9 **Hoepel** (Dynamics, 22.15)

(a) Voor de hoepel geldt:

$I_O = mr^2 + mr^2 = 2mr^2$

Moment t.o.v. O:

$M_O = -mgr\theta$

Bewegingsvergelijking in θ:

$-mgr\theta = I_O\alpha = 2mr^2\ddot{\theta}$

Differentiaalvergelijking:

$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{2r}\right)\theta = 0$

Oplossing: $T_h = \frac{2\pi}{\omega_h} = 2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}$

(b) Voor de staaf hoeft enkel een ander traagheidsmoment ($I = \frac{1}{3}m(2r)^2 = \frac{4}{3}mr^2$) ingevuld te worden:

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = 2\pi\sqrt{\frac{4r}{3g}}$$

Dat is kleiner dan T_h.

Voor de massa aan het touwtje weten we: $T_t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}$

Er geldt dus: $T_t = T_h > T_s$

10 Nog een hoepel (BFO 1985)

De lengte van de draad is l.

De afstand van T naar S is x, de afstand van S naar T is dan $l - x$.

Dan volgt: $R_{TS} = \frac{x}{l}R$ en $R_{ST} = \frac{l-x}{l}R$

De weerstanden staan parallel: $\frac{6}{R} = \frac{l}{x}\frac{1}{R} + \frac{l}{l-x}\frac{1}{R}$

Uitwerken: $6 = \frac{l}{x} + \frac{l}{l-x}$

Oftewel: $6 = \frac{l^2-xl+xl}{xl-x^2} = \frac{l^2}{xl-x^2}$

Herschrijven: $6xl - 6x^2 - l^2 = 0$

ABC formule: $x = \frac{6l\pm\sqrt{36l^2-24l^2}}{12}$

Antwoord: $x = \frac{l}{2} \pm \frac{l}{\sqrt{12}}$

Invullen levert: $l(0{,}7887)$ of $l(0{,}2113)$. Dat komt overeen met 284° en 76°.

11 Opgehoepeld (SNON 2009-2)

Neem aan dat de stroom van A naar B loopt. De stroom onderlangs noemen we I_O, de stroom bovenlangs I_B. De lengte van de cirkelboog heten resp. l_O en l_B.

De stroom onderlangs resulteert in een magneetveld het papier uit. Voor de grootte ervan geldt:

$$B_O = \frac{\mu_0 I_O l_O}{4\pi R^2}$$

De stroom bovenlangs levert een magneetveld het papier in. Voor de grootte daarvan geldt:

$$B_B = \frac{\mu_0 I_B l_B}{4\pi R^2}$$

We maken gebruik van 2 vergelijkingen.

Ten eerste de relatie tussen de 2 cirkelbogen: $l_B = 2\pi R - l_O$

Ten tweede de relatie tussen de stromen. Omdat de stroom omgekeerd evenredig is met de lengte van de draad, geldt:

$$\frac{I_B}{I_O} = \frac{l_O}{l_B}$$

De eerste vergelijking ingevuld in de tweede levert:

$$I_B = \frac{l_O}{l_B} I_O = \frac{l_O}{2\pi R - l_O} I_O$$

We vullen dit resultaat in in de vergelijking voor B_B:

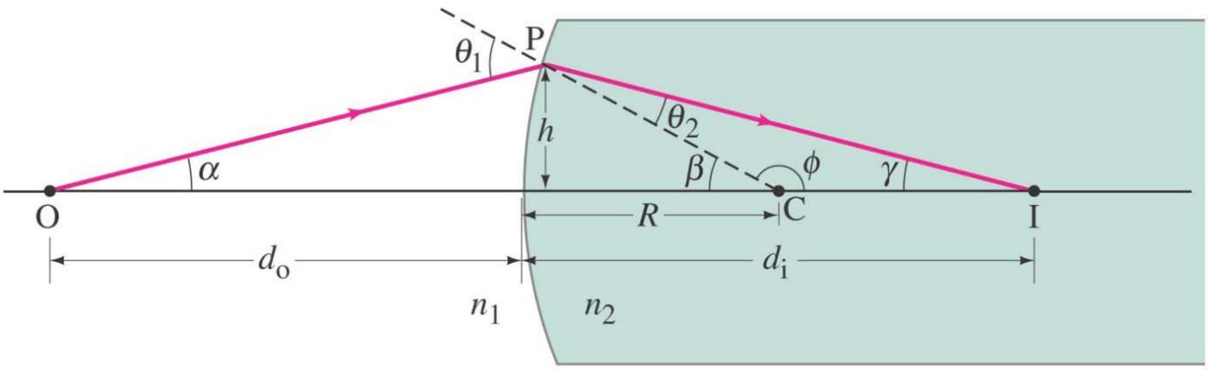
$$B_B = \frac{\mu_0 \left(\frac{l_O}{2\pi R - l_O} I_O\right)(2\pi R - l_O)}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 l_O I_O}{4\pi R^2}$$

Dit is precies dezelfde uitkomst als voor B_O maar omdat de richtingen tegengesteld zijn heffen de twee velden elkaar op.
De uitkomst is dus 0 T.

12 Glazen bol (Giancoli H32)

(a) Zie de figuur voor de verschillende hoeken en afstanden.
Snellius: $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$
De hoeken θ_1, θ_2, α, β en γ klein zijn zodat: $\sin\theta \approx \theta$.
Dus geldt: $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$
Verder geldt: $\beta + \phi = 180°$ en $\theta_2 + \gamma + \phi = 180°$, dus $\beta = \gamma + \theta_2$
Evenzo geldt voor driehoek OPC: $\theta_1 = \alpha + \beta$
Na combineren leveren deze drie vergelijkingen: $n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta$
Omdat we alleen geïnteresseerd zijn in kleine hoeken kunnen we bij benadering schrijven:
$\alpha = \frac{h}{d_0}, \beta = \frac{h}{R}, \gamma = \frac{h}{d_1}$
Dit ingevuld levert:

$$\frac{n_1}{d_0} + \frac{n_2}{d_1} = \frac{(n_2 - n_1)}{R}$$



(b) Twee keer goed invullen: eerste stap met $d_0 = 25 - 10 = 15$ cm levert op dat het beeld op -90 cm staat, dat is dus links van de bron. De tweede keer invullen: rekening houden met dat die kant concaaf is, oftewel $R = -10$ cm. Dat levert op dat het beeld op een afstand van 28 cm van de achterkant van de bol staat.